Distributivgesetze und DEDEKIND'sche Schnitte

Erné, Marcel

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 33, 1982, S.117-145

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Distributivgesetze und DEDEKIND'sche Schnitte

Von **Marcel Erné**, Hannover

Abstract

The DEDEKIND–MACNEILLE completion by cuts as well as FRINK's ideal completion are used in order to introduce distributive laws in partially ordered sets. Replacing each identity of the form $x = \bigvee Y$ by $\Delta x = \Delta Y$, where ΔY is the least cut (i.e. the intersection of all principal ideals) containing Y, we transform the distributive law $(d_\vee)$ $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ into the identity $(\delta_\vee)$ $\Delta x \cap \Delta\{y,z\} = \Delta(\Delta x \cap (\Delta y \cup \Delta z))$, and the infinite distributive law $(d_\bigvee)$ $x \wedge \bigvee Y = \bigvee\{x \wedge y : y \in Y\}$ into $(\delta_\bigvee)$ $\Delta x \cap \Delta Y = \Delta(\Delta x \cap \bigcup\{\Delta y : y \in Y\})$. Accordingly, we call a quasiordered set Q with cut operator Δ *weakly distributive* or *strongly distributive*, respectively, if $(\delta_\vee)$ or $(\delta_\bigvee)$ are satisfied. Replacing the cut operator Δ with the ideal operator I (which associates to each subset the least ideal containing it), we arrive at the notion of *ideal distributivity.* Finally, we say Q is *cut distributive* if $(\delta_\bigvee)$ holds at least for all sets Y which are finite unions of cuts.

Besides various different characterizations of these distributivity concepts, we obtain the following facts:

(1) Q is strongly distributive if and only if the cut completion $\delta(Q)$ satisfies the infinite distributive law $(d_\bigvee)$.
(2) Q is weakly distributive if and only if the least sublattice of $\delta(Q)$ containing all principal ideals is distributive.
(3) Q is cut distributive if and only if $\delta(Q)$ is distributive.
(4) Q is ideal distributive if and only if the ideal completion $\iota(Q)$ is distributive.

Most of the results are extended from cut resp. ideal completions to arbitrary closure systems. Furthermore, it is shown by counterexamples that for arbitrary quasiordered sets, all four types of distributivity are distinct while in lattices, (2), (3) and (4) describe the usual distributive law $(d_\vee)$.

1. RICHARD DEDEKIND und die Grundlagen der Verbandstheorie

> Hierbei verliert zwar die Untersuchung ihr arithmetisches Gepräge fast ganz, so daß sie mathematische Kenntnisse kaum noch voraussetzt, aber zugleich treten die Gesetze und ihre Gründe deutlicher hervor, und ich darf hoffen, daß in dieser Hinsicht meine Arbeit doch noch einigen Mathematikern willkommen sein mag. (R. DEDEKIND, *Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Teiler.* Festschrift der Technischen

Hochschule zu Braunschweig bei Gelegenheit der 69. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte, S. 1–40, 1897).

Mit diesen bescheidenen Worten eröffnet DEDEKIND eine Arbeit, deren Entstehung man als Geburtsstunde der modernen *Verbandstheorie* ansehen kann, obwohl es an die vierzig Jahre dauern sollte, bis die Tragweite dieser Theorie in vollem Ausmaß erkannt wurde und durch Arbeiten von F. KLEIN–BARMEN [23], G. BIRKHOFF [8], [9] und M. H. STONE [34], [35] allgemeine Anerkennung fand. E. NOETHER hat allerdings schon früher auf die besondere Bedeutung der DEDEKIND'schen Theorie der „*Dualgruppen*" hingewiesen (vgl. [14, S. 147 u. 271]). Heute hat sich für diese Strukturen die von F. KLEIN–BARMEN stammende Bezeichnung „*Verbände*" durchgesetzt.

In § 4 der eingangs zitierten DEDEKIND'schen Abhandlung steht bereits implizit die Äquivalenz der ordnungstheoretischen und der algebraischen Definition der Verbände, welche sich später als so überaus fruchtbar erweisen sollte. Allerdings taucht der Begriff der *teilweise geordneten Menge* erst bei HAUSDORFF [21] auf, während DEDEKIND statt mit den Ordnungsrelationen $\leqq$ (bei ihm etwas mißverständlich mit $<$ bezeichnet) lieber mit den „Hauptschnitten" $\downarrow y = \{x : x \leqq y\}$ arbeitete (ohne diesen Namen explizit zu verwenden). Für eine detaillierte Schilderung der Entwicklung der Verbandstheorie aus den DEDEKIND'schen Anfängen bis in die vierziger Jahre unseres Jahrhunderts sei auf H. MEHRTENS [26] verwiesen.

Die *distributiven Verbände*, also solche, in denen das Distributivgesetz (bei DEDEKIND: „*Idealgesetz*")

$$(d_{\vee})\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

gilt, nannte DEDEKIND „*Dualgruppen vom Idealtypus*". Dabei hatte er (wie schon die Namensgebung verrät) vorrangig die Gruppen gebrochener Ideale in algebraischen Zahlkörpern vor Augen. Daß es sich hierbei tatsächlich um distributive Verbände handelt, bewies er auf äußerst elegante Weise mit Hilfe des folgenden viel allgemeineren Satzes, den man als Fundamentalsatz der Verbandsgruppentheorie bezeichnen kann; (vgl. [14, S. 127–135] und [9, VIII, Th. 2–4]). *Ist* G *sowohl eine Gruppe als auch ein* $\wedge$*-Halbverband mit*

$$(\cdot)\quad x(y \wedge z) = xy \wedge xz$$

so ist G *bereits ein distributiver Verband, in welchem das Supremum* $x \vee y$ *durch die Gleichung*

$$(x \wedge y)\,(x \vee y) = xy$$

bestimmt ist.

Man kann sogar zeigen, daß in einer solchen „Verbandsgruppe" das *unendliche Distributivgesetz*

$$(d_{\bigvee})\ x \wedge \bigvee Y = \bigvee (x \wedge Y)$$
$$(\text{mit } x \wedge Y = \{x \wedge y : y \in Y\})$$

für jede Menge Y erfüllt ist, welche ein Supremum $\bigvee Y$ besitzt (vgl. hierzu etwa [9, VIII, Th. 25]). In allgemeinen distributiven Verbänden gilt $(d_\bigvee)$ jedoch nur für nichtleere *endliche* Teilmengen Y. Einen *vollständigen* Verband, in dem $(d_\bigvee)$ für beliebige Teilmengen Y richtig ist, wollen wir $\bigvee$-*distributiv* nennen (vgl. KATRIŇÁK [22]). Man beachte, daß eine nichttriviale Verbandsgruppe kein größtes Element besitzt und daher kein vollständiger Verband sein kann. Beispiele $\bigvee$-distributiver Verbände sind alle vollständigen Ketten und alle vollständigen Booleschen Verbände, aber auch jede Topologie, aufgefaßt als System der *offenen* Mengen eines topologischen Raumes. Hingegen ist das System der *abgeschlossenen* Mengen zwar stets ein distributiver vollständiger Verband, jedoch im allgemeinen nicht $\bigvee$-distributiv. Zum Beispiel ergibt sich im Verband der abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ (bezüglich der Euklidischen Topologie):

$$\{0\} \wedge \bigvee \{[\tfrac{1}{n},1] : n \in \mathbb{N}\} = \{0\} \cap [0,1] = \{0\},$$
$$\bigvee\{\{0\} \wedge [\tfrac{1}{n}:1] : n \in \mathbb{N}\} = \bigvee \emptyset = \emptyset.$$

Neben den Idealverbänden erwähnt DEDEKIND bereits eine ganze Reihe weiterer Beispiele von distributiven Verbänden, so die Teilerverbände und die von E. SCHRÖDER [32] eingehend studierten Mengensysteme, welche gegen binäre Vereinigungs- und Durchschnittsbildung abgeschlossen sind. Die heute übliche Bezeichnung für ein solches System ist *Mengenverband* (oder auch *Mengenring*).

Während der ringtheoretische Idealbegriff im Brennpunkt vieler algebraischer und zahlentheoretischer Studien DEDEKINDS steht, taucht der völlig analog definierte (und in entsprechender Weise auf Zerlegungsprobleme anwendbare) Begriff des *Verbandsideals* anscheinend erst sehr viel später auf, nämlich in den Arbeiten von M. H. STONE [34], [35] aus den dreißiger Jahren. Unter einem *Ideal* eines Verbandes V versteht man bekanntlich eine (gelegentlich als nichtleer vorausgesetzte) Teilmenge Y von V mit den beiden Eigenschaften

$$x \in Y \text{ und } y \in Y \Rightarrow x \vee y \in Y,$$
$$x \in V \text{ und } y \in Y \Rightarrow x \wedge y \in Y,$$

welche man zu der Äquivalenz

$$x \in Y \text{ und } y \in Y \Leftrightarrow x \vee y \in Y$$

zusammenfassen kann. Die Gesamtheit $\iota(V)$ aller Ideale von V ist bezüglich Mengeninklusion ein vollständiger Verband, welcher zwei bemerkenswerte Eigenschaften hat:

(1) $\iota(V)$ ist genau dann distributiv, wenn dies für V gilt.
(2) Jedes Element von $\iota(V)$ ist Infimum (d.h. Durchschnitt) von (infimum-) irreduziblen Idealen.

(vgl. [12, 6.1 und 9.1]). In dieser Zerlegungseigenschaft liegt, ähnlich wie bei der Theorie der Ringideale, die vorrangige Bedeutung des Idealbegriffs. Beispielsweise läßt sich aus ihr sofort der BIRKHOFF–STONE'sche Darstellungssatz ableiten, welcher besagt, daß *ein Verband genau dann distributiv ist, wenn er isomorph zu einem*

Mengenverband ist: Ordnet man jedem Element x eines distributiven Verbandes V die Menge aller x nicht enthaltenden irreduziblen Ideale ("Primideale") zu, so erhält man einen Verbandshomomorphismus von V in eine Potenzmenge, und folglich ist das Bild dieses Homomorphismus ein Mengenverband. Die Zerlegungseigenschaft (2) garantiert dabei gerade die Injektivität der angegebenen Abbildung (vgl. BIRKHOFF [8] und [9, S. 194]).

Etwa gleichzeitig mit SCHRÖDER entdeckte DEDEKIND den *„eigenthümlichen Dualismus des Idealgesetzes"*, d.h. die Äquivalenz der Identität $(d_\vee)$ mit dem dualen Gesetz

$$(d_\wedge) \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Heute sagt man, Distributivität sei eine *selbstduale Eigenschaft.* Darunter versteht man allgemein eine Eigenschaft, welche genau dann für einen Verband V (oder allgemeiner für eine geordnete Menge) erfüllt ist, wenn sie für die zu V *duale* Struktur $V^\sim$ gilt, welche aus V durch Umkehrung der Ordnungsrelation entsteht.

Bei der Suche nach sinnvollen Verallgemeinerungen des Distributivgesetzes auf beliebige quasigeordnete Mengen werden wir uns von den Postulaten der „Idealinvarianz" und der „Selbstdualität" leiten lassen. Wir vermerken an dieser Stelle, daß V-Distributivität natürlich *keine* selbstduale Eigenschaft ist (wie das Beispiel der Euklidischen Topologie, aufgefaßt als vollständiger Verband, zeigte: Der duale Verband ist hier bis auf Isomorphie gerade das System der abgeschlossenen Mengen).

Die eingangs zitierte Arbeit und die daran anknüpfende Schrift *„Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe"* [14] aus dem Jahre 1900 sind keineswegs die einzigen Beiträge DEDEKINDs zur Begründung der modernen Ordnungs- und Verbandstheorie. Eine mindestens ebenso wichtige „Erfindung" auf diesem Gebiet waren zweifellos die berühmten DEDEKIND'*schen Schnitte,* mit Hilfe derer er den angeordneten Körper der reellen Zahlen aus dem der rationalen Zahlen gewann [13]. Auch wenn heute nicht generelle Einigkeit darüber besteht, ob DEDEKINDs Methode die elementarste und eleganteste Einführung der reellen Zahlen darstellt (vgl. G.J. RIEGER: *„Was sind und was sollen die* DEDEKIND-*Schnitte noch?"*, diese Festschrift), so ist doch die Tragweite seiner Konstruktion im Hinblick auf die Vervollständigung beliebiger geordneter Mengen unumstritten. Eine systematische Analyse dieses allgemeinen Konzepts der „Vervollständigung durch Schnitte" findet sich allerdings erst in den Arbeiten von H.M. MACNEILLE [24], [25], gut fünfzig Jahre nach der 1872 erschienenen Erstveröffentlichung von DEDEKINDs Abhandlung über *„Stetigkeit und irrationale Zahlen"* [13].

Bekanntlich verstand DEDEKIND unter einem *Schnitt* eine Zerlegung der Menge der rationalen Zahlen in zwei nichtleere Teilmengen A (genannt Unterklasse) und B (genannt Oberklasse) mit der Eigenschaft, daß jedes Element von A kleiner als jedes Element von B ist. Die vom axiomatischen Standpunkt aus etwas unbequeme Tatsache, daß bei dieser Definition jeder rationalen Zahl q *zwei* Schnitte entsprechen (je nachdem ob man q zur Unter- oder zur Oberklasse rechnet), hat MACNEILLE durch einen einfachen Kunstgriff geschickt umgangen: Anstatt die Disjunktheit der Mengen A und B in der Schnittdefinition zu fordern, verlangte er, daß A *genau* die Menge aller unteren Schranken von B und umgekehrt B genau die Menge aller oberen Schranken von A sein solle. In dieser Definition, welche sich offenbar auf beliebige teilweise geordnete Mengen anwenden läßt, ist wiederum die Unterklasse A durch die Oberklasse B eindeutig bestimmt, so daß es genügt, sich auf die Betrachtung einer der beiden Mengen zu beschränken. Dies führt auf den heute üblichen Begriff der (unteren bzw. oberen) Schnitte in quasigeordneten Mengen, wie wir ihn in der vorliegenden Arbeit verwenden wollen. Die Gesamtheit aller Schnitte bildet (wie in Abschnitt 2 genauer erläutert wird) einen vollständigen Verband, der üblicherweise *Schnittvervollständigung* oder *Normalvervollständigung* genannt wird. (Im Sinne der allgemeinen ordnungstheoretischen Definition bekommt man als Vervollständigung der total geordneten Menge $\mathbb{Q}$ natürlich nicht die reelle Zahlengerade $\mathbb{R}$, sondern deren „Zweipunktkompaktifizierung" $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.)

Von den vielen universellen Eigenschaften der Normalvervollständigung einer teilweise geordneten Menge Q sei hier nur erwähnt, daß es sich dabei in gewissem Sinne um den kleinsten vollständigen Verband handelt, welcher die vorgegebene Menge Q enthält: Jede ordnungserhaltende Abbildung von Q in einen beliebigen vollständigen Verband läßt sich (im allgemeinen allerdings nicht eindeutig) auf die Normalvervollständigung fortsetzen. Für weitere Details sei auf die Arbeiten von MACNEILLE [24], [25], BANASCHEWSKI und BRUNS [3], [4], [10], SCHMIDT [30] und BISHOP [7] verwiesen.

Wir wollen nun im folgenden der Frage nachgehen, wie man das Konzept der Schnitte zur Erweiterung der verbandstheoretischen Distributivgesetze auf beliebige teilweise geordnete Mengen (allgemeiner: quasigeordnete Mengen) ausnutzen kann. Eine ausführliche Darstellung der zugrundeliegenden „vervollständigungsinvarianten" Theorie teilweise geordneter Mengen sowie einige der im folgenden vorgestellten Resultate findet man in [17]. Zum Verständnis der vorliegenden Arbeit ist die Kenntnis des „Vorläufers" [17] jedoch nicht erforderlich.

Der Spezialfall der Verbände wurde bereits 1952 von DILWORTH und MCLAUGHLIN in [15] behandelt.

2. Hüllenoperatoren und Schnittoperatoren

Bevor wir zur eigentlichen Theorie der Schnittoperatoren kommen, erscheint es unumgänglich, einige der verwendeten Symbole und Begriffe kurz zu erläutern, da die in der Literatur auftretenden Bezeichnungen sehr uneinheitlich sind. Wir beginnen mit einigen mengen- und ordnungstheoretischen Notationen.

Ist Y eine Teilmenge der Menge X, so schreiben wir $Y \subseteq X$, während $Z \subseteq\!\!\!\!\!\cdot\;\, X$ bedeutet, daß Z eine *endliche* Teilmenge von X ist ($Z = \emptyset$ nicht ausgeschlossen). Das Symbol

$\mathfrak{P}X$ steht für die *Potenzmenge* von X, $\mathfrak{E}X$ für das System aller endlichen nichtleeren Teilmengen und $\mathfrak{F}X$ für das aller endlichen Teilmengen von X. Eine beliebige Teilmenge $\mathfrak{Y}$ von $\mathfrak{P}X$ ist ein *Mengensystem auf* X. Es sei

$$\bigcup \mathfrak{Y} := \{x \in X : x \in Y \text{ für mindestens ein } Y \in \mathfrak{Y}\}$$

die *Vereinigung*, und

$$\bigcap \mathfrak{Y} := \{x \in X : x \in Y \text{ für jedes } Y \in \mathfrak{Y}\}$$

der *Durchschnitt* des Systems $\mathfrak{Y}$.

Die Begriffe *Hüllenoperator, Hüllensystem* etc. haben die übliche *mengentheoretische* Bedeutung. Ein Hüllenoperator über X ist also eine extensive, isotone und idempotente Abbildung der Potenzmenge $\mathfrak{P}X$ in sich (vgl. etwa SCHMIDT [27], [28], [29]). Bekanntlich erhält man eine Bijektion zwischen Hüllenoperatoren und Hüllensystemen, indem man jedem Hüllenoperator Γ sein Bild $\Gamma[\mathfrak{P}X]$ (d. h. das System der Γ-*abgeschlossenen* Mengen) zuordnet. Umgekehrt erhält man zu einem Hüllensystem $\mathfrak{X}$ den zugehörigen Hüllenoperator Γ durch die Festsetzung

$$\Gamma Y = \bigcap\{Z \in \mathfrak{X} : Y \subseteq Z\}.$$

Das Paar (X,Γ) nennen wir einen *Hüllenraum* und die Mengen $\Gamma y := \Gamma\{y\}$ *Punktabschlüsse.*

Für jede Menge X sind die folgenden vier Abbildungen spezielle Hüllenoperatoren über $\mathfrak{P}X$ (nicht über X!):

$$\begin{aligned}
\bar{\bigcup} &: \mathfrak{X} \longmapsto \bar{\bigcup}\mathfrak{X} = \{\bigcup\mathfrak{Y} : \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\},\\
\underline{\bigcap} &: \mathfrak{X} \longmapsto \underline{\bigcap}\mathfrak{X} = \{\bigcap\mathfrak{Y} : \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\},\\
\bar{\cup} &: \mathfrak{X} \longmapsto \bar{\cup}\mathfrak{X} = \{\bigcup\mathfrak{Z} : \emptyset \neq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Z}\},\\
\underline{\cap} &: \mathfrak{X} \longmapsto \underline{\cap}\mathfrak{X} = \{\bigcap\mathfrak{Z} : \emptyset \neq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Z}\}.
\end{aligned}$$

Offenbar ist $\underline{\bigcap}\mathfrak{X}$ gerade das kleinste $\mathfrak{X}$ umfassende Hüllensystem. Gilt $\mathfrak{X} = \bar{\bigcup}\mathfrak{X} = \underline{\bigcap}\mathfrak{X}$, so nennen wir $\mathfrak{X}$ eine A-Topologie; üblich sind auch die Bezeichnungen (A-) *diskrete Topologie* [2], *prinzipale Topologie* [33] oder *vollständiger Mengenring* [9], [11]. A-Topologien sind also genau diejenigen Hüllensysteme, welche zugleich Topologien sind.

Nun zu den ordnungstheoretischen Grundbegriffen: Eine *Quasiordnung* auf der Menge X ist eine reflexive und transitive Relation $\leqq$ auf X. Ist sie auch antisymmetrisch, so sprechen wir von einer *teilweisen Ordnung.* Sind außerdem je zwei Elemente $x,y \in X$ bezüglich $\leqq$ *vergleichbar* (d.h. $x \leqq y$ oder $y \leqq x$), so handelt es sich um eine *totale Ordnung.* Entsprechend nennt man das Paar $Q = (X,\leqq)$ eine *quasi-, teilweise* oder *total geordnete Menge* (im letzten Fall auch *Kette*). Ist $\leqq$ eine Quasi- (teilweise, totale) Ordnung, so auch die durch $x \geqq y :\Leftrightarrow y \leqq x$ definierte *duale Relation* $\geqq$. $Q^{\sim} = (X,\geqq)$ heißt die zu $Q = (X,\leqq)$ *duale* quasi- (teilweise, total) geordnete Menge. Für ein Element $y \in X$ setzen wir

$$\downarrow y := \{x \in X : x \leqq y\}, \quad \uparrow y := \{x \in X : y \leqq x\},$$

und für eine beliebige Teilmenge Y von X sei

$$\downarrow Y := \bigcup \{\downarrow y : y \in Y\}, \quad \uparrow Y := \bigcup \{\uparrow y : y \in Y\},$$
$$Y_\downarrow := \bigcap \{\downarrow y : y \in Y\}, \quad Y^\uparrow := \bigcap \{\uparrow y : y \in Y\}.$$

$\downarrow Y$ (bzw. $\uparrow Y$) heißt der *von* Y *erzeugte untere* (bzw. *obere) Abschnitt.* Ist Y eine endliche Menge, so sagen wir, $\downarrow Y$ sei ein *endlich erzeugter (unterer) Abschnitt.* Die Elemente von $Y_\downarrow$ sind die *unteren Schranken*, die Elemente von $Y^\uparrow$ die *oberen Schranken* der Menge Y. Jede zu Y gehörige untere Schranke von Y heißt *kleinstes Element* von Y. In quasigeordneten Mengen können Teilmengen mehrere kleinste Elemente besitzen (die dann allerdings paarweise vergleichbar sind), während in teilweise geordneten Mengen kleinste Elemente eindeutig bestimmt sind. *Größte Elemente* definiert man dual. Die Begriffe *Infimum (größte untere Schranke), Supremum (kleinste obere Schranke),* $\vee$ - bzw. $\wedge$*-Halbverband, Verband, vollständiger Verband, Verbandshomomorphismus* etc. sowie die Symbole $\vee, \wedge, \bigvee, \bigwedge$ verwenden wir im üblichen Sinn (vgl. etwa BIRKHOFF [9] oder GRÄTZER [20]). Dabei greifen wir lieber auf die *ordnungstheoretischen* als auf die algebraischen Definitionen zurück, um später die gewünschten Verallgemeinerungen auf quasigeordnete Mengen mühelos vollziehen zu können.

Eine wichtige Klasse vollständiger Verbände ist die der (durch Mengeninklusion teilweise geordneten) Hüllensysteme. Hier stimmen beliebige Infima mit den entsprechenden Durchschnitten überein, während das Supremum eines Teilsystems der *Abschluß* der Vereinigung ist. In einem Hüllensystem $\mathfrak{X}$ mit zugehörigem Hüllenoperator Γ gilt also

$$\begin{aligned} \bigwedge \mathfrak{Y} &= \bigcap \mathfrak{Y} \\ \bigvee \mathfrak{Y} &= \Gamma(\bigcup \mathfrak{Y}) \end{aligned} \qquad (\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}).$$

In einer A-Topologie fallen auch beliebige Suprema mit den entsprechenden Vereinigungen zusammen (und der zugehörige Hüllenoperator erhält nicht nur endliche, sondern sogar beliebige Vereinigungen).

Das folgende Lemma über supremumerhaltende Abbildungen zwischen gewissen Mengensystemen wird im Verlauf unserer Betrachtungen von besonderem Nutzen sein:

Lemma 2.1. *Sei Γ ein Hüllenoperator über* X *und $\mathfrak{X}$ das zugehörige Hüllensystem. Dann ist für jedes $\mathfrak{X}$ umfassende Mengensystem $\mathfrak{M}$ auf* X *die Restriktion $\Gamma|_{\mathfrak{M}}$ eine Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{X}$, die alle existierenden Suprema bewahrt. (Dabei ist die Ordnungsrelation auf $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{X}$ die Mengeninklusion).*

Den einfachen Beweis können wir hier übergehen.

Wir werden dieses Lemma meist in Verbindung mit der folgenden offensichtlichen Tatsache anwenden:

Lemma 2.2. *Das Bild eines distributiven Verbandes* V *unter einem Verbandshomomorphismus* φ *ist wieder ein distributiver Verband. Ist* V *sogar* $\bigvee$*-distributiv und erhält* φ *zusätzlich beliebige Suprema, so ist auch das Bild* $\varphi[V]$ $\bigvee$*-distributiv.*

Jeder Hüllenoperator Γ über einer Menge X induziert eine Quasiordnung $\leqq$ vermöge

$$x \leqq y :\Leftrightarrow x \in \Gamma y \qquad (x,y \in X).$$

Umgekehrt gibt es zu jeder quasigeordneten Menge $Q = (X,\leqq)$ zwei „charakteristische" Hüllenoperatoren, welche die Quasiordnung $\leqq$ induzieren, nämlich den *Abschnittoperator*

$$\downarrow : \mathfrak{P}X \longrightarrow \mathfrak{P}X,\ Y \longmapsto {\downarrow}Y = \bigcup\{{\downarrow}y : y \in Y\}$$

und den *Schnittoperator*

$$\Delta : \mathfrak{P}X \longrightarrow \mathfrak{P}X,\ Y \longmapsto Y^{\uparrow}{}_{\downarrow} = \bigcap\{{\downarrow}y : Y \subseteq {\downarrow}y\}.$$

Die Fixpunkte des Abschnittoperators $\downarrow$ heißen *(untere) Abschnitte;* sie bilden nicht nur ein Hüllensystem, sondern sogar eine A-Topologie $\theta(Q)$ (vgl. ALEXANDROFF [2]).

Die Fixpunkte des Schnittoperators Δ, im folgenden *(untere) Schnitte* genannt, bilden ein *Schnittsystem* $\delta(Q)$, d.h. ein Hüllensystem, dessen sämtliche Elemente als Durchschnitte von Punktabschlüssen darstellbar sind (vgl. ABIAN [1], BANASCHEWSKI [3], SCHMIDT [30]).

Wie eine einfache Überlegung zeigt, ist $\theta(Q)$ das größte und $\delta(Q)$ das kleinste Hüllensystem, dessen Hüllenoperator die vorgegebene Quasiordnung induziert. Analog definieren wir *obere Abschnitte* und *obere Schnitte* mit Hilfe der „dualen" Hüllenoperatoren

$$\uparrow : \mathfrak{P}X \longrightarrow \mathfrak{P}X,\ Y \longmapsto {\uparrow}Y,$$
$$\nabla : \mathfrak{P}X \longrightarrow \mathfrak{P}X,\ Y \longmapsto Y_{\downarrow}{}^{\uparrow}.$$

Unsere Schnittdefinitionen hängen mit der ursprünglichen, von MACNEILLE gegebenen, folgendermaßen zusammen: Ein Paar $(A,B) \in \mathfrak{P}X \times \mathfrak{P}X$ ist genau dann ein DEDEKIND–MACNEILLE'scher Schnitt, wenn $A = B_{\downarrow}$ und $B = A^{\uparrow}$ gilt. In diesem Fall ist A ein unterer und B ein oberer Schnitt. Umgekehrt sind für jeden unteren Schnitt A und jeden oberen Schnitt B die Paare $(A,A^{\uparrow})$ und $(B_{\downarrow},B)$ DEDEKIND–MACNEILLE'sche Schnitte.

Wir merken noch an, daß jede quasigeordnete Menge sowohl durch ihren Abschnitt- als auch durch ihren Schnittoperator eindeutig bestimmt ist. Genauer ist die Zuordnung $Q \longmapsto \theta(Q)$ eine Bijektion zwischen quasigeordneten Mengen und A-Topologien, während die Zuordnung $Q \longmapsto \delta(Q)$ eine Bijektion zwischen quasigeordneten Mengen und Schnittsystemen darstellt (vgl. [2] und [16]).

In beliebigen quasigeordneten Mengen können wir die Tatsache, daß x eine kleinste obere Schranke der Menge Y ist, durch jede der beiden Gleichungen ${\uparrow}x = Y^{\uparrow}$ und $\Delta x = \Delta Y$ beschreiben. Entsprechend ist x genau dann größte untere Schranke von Y, wenn $\downarrow x = Y_\downarrow$ bzw. $\Delta x = \bigcap\{\Delta y : y \in Y\}$ gilt. Auf diese Weise lassen sich alle Gleichungen, welche Suprema und Infima beinhalten, allein mit Hilfe des Schnittoperators Δ formulieren. Wir werden hiervon später ausgiebig Gebrauch machen.

Da $\delta(Q)$ und $\theta(Q)$ Hüllensysteme, insbesondere also vollständige Verbände sind, spricht man auch von der *Schnittvervollständigung* $\delta(Q)$ und der *Abschnittvervollständigung* $\theta(Q)$. Im Falle der total geordneten Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist $\delta(\mathbb{Q})$ ein Modell für die vervollständigte reelle Zahlengerade $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, während $\theta(\mathbb{Q})$ gerade aus allen Unterklassen DEDEKIND'scher Schnitte im ursprünglichen Sinne besteht (*ohne* Identifikation der jeweils zwei Schnitte, die von einer rationalen Zahl erzeugt werden!), einschließlich der leeren Menge $\emptyset$ und der Gesamtmenge $\mathbb{Q}$. Im allgemeinen ist $\theta(Q)$ wesentlich größer als $\delta(Q)$. Zum Beispiel ist $\theta(\mathbb{R})$ isomorph zu einer Kette, die man bekommt, indem man jede reelle Zahl „verdoppelt" und $\pm\infty$ hinzufügt. Für eine Antikette A (d.h. eine Menge paarweise unvergleichbarer Elemente) entsteht $\delta(A)$ (bis auf Isomorphie) durch Hinzufügen eines kleinsten und eines größten Elements, während $\theta(A)$ die volle Potenzmenge $\mathfrak{P}A$ ist.

Jede *teilweise* geordnete Menge kann als Teilmenge ihrer Schnitt- bzw. Abschnittvervollständigung aufgefaßt werden, vermöge der Einbettung, welche jedem Element y den davon erzeugten *Hauptschnitt* $\downarrow y$ zuordnet. Für vollständige Verbände V ist diese Abbildung bereits ein Isomorphismus zwischen V und $\delta(V)$, weshalb die Hüllensysteme (ja sogar die Schnittsysteme) bis auf Isomorphie alle vollständigen Verbände repräsentieren. Hingegen ist V *niemals* isomorph zu $\theta(V)$! Neben der Schnittvervollständigung $\delta(Q)$ und der Abschnittvervollständigung $\theta(Q)$ einer quasigeordneten Menge $Q = (X, \leqq)$ ist ein weiteres Hüllensystem von besonderer Wichtigkeit für unsere Untersuchungen, nämlich die sogenannte *Idealvervollständigung*

$$\iota(Q) = \{Y \subseteq X : Z \Subset Y \text{ impliziert } \Delta Z \subseteq Y\}.$$

Die Elemente von $\iota(Q)$ heißen *Ideale.* Sie sind offenbar genau die Vereinigungen gerichteter Systeme von Schnitten. Diese auf FRINK [18] zurückgehende Idealdefinition umfaßt die klassische Definition der Verbandsideale, ist aber wesentlich „jünger" als letztere. Die leere Menge ist genau dann ein Ideal, wenn die Gesamtmenge kein kleinstes Element hat. Jedes Ideal ist ein Abschnitt, und jeder Schnitt ist ein Ideal. Deshalb werden die Hauptschnitte $\downarrow y$ auch *Hauptideale* genannt. Der zu dem Idealsystem $\iota(Q)$ gehörige Hüllenoperator ist der *Idealoperator*

$$I : \mathfrak{P}X \longrightarrow \mathfrak{P}X,\ Y \longmapsto \bigcup\{\Delta Z : Z \Subset Y\}.$$

Aus dieser Darstellung ersieht man sofort, daß $\iota(Q)$ sogar ein algebraisches Hüllensystem ist (vgl. BANASCHEWSKI [3] und SCHMIDT [27], [28]).

Fassen wir zusammen:

Satz 2.3. *Für eine quasigeordnete Menge* Q *sei* $\mu(Q)$ *das System der Hauptideale. Dann gilt:*

(1) *Die Schnittvervollständigung* $\delta(Q)$ *ist das kleinste* $\mu(Q)$ *umfassende Hüllensystem.*

(2) *Die Abschnittvervollständigung* $\theta(Q)$ *ist die kleinste* $\mu(Q)$ *umfassende* A-*Topologie.*
(3) *Die Idealvervollständigung* $\iota(Q)$ *ist das kleinste* $\mu(Q)$ *umfassende algebraische Hüllensystem.*

Neben diesen Vervollständigungen werden wir drei weitere zwischen $\mu(Q)$ und $\theta(Q)$ liegende Systeme zu betrachten haben, welche zwar Verbände, aber im allgemeinen nicht vollständig (insbesondere keine Hüllensysteme) sind. Das erste ist der von $\mu(Q)$ erzeugte Unterverband von $\delta(Q)$, bezeichnet mit $\mathring{\delta}(Q)$. Wir nennen ihn die *Verbandsergänzung* der quasigeordneten Menge Q. Das zweite System besteht aus allen nichtleeren endlichen Durchschnitten nichtleerer endlich erzeugter unterer Abschnitte. Dies ist offenbar ein Mengenverband (genau der von $\mu(Q)$ erzeugte Unterverband von $\theta(Q)$), und soll mit $\mathring{\theta}(Q)$ bezeichnet werden. Ebenfalls ein Mengenverband ist das System $\smile\delta(Q)$ aller nichtleeren endlichen Vereinigungen von Schnitten.

Für die zuvor eingeführten Systeme gelten die folgenden Inklusionen:

$$\mu(Q) \subseteq \mathring{\delta}(Q) \subseteq \delta(Q) \subseteq \iota(Q) \subseteq \theta(Q),$$
$$\mu(Q) \subseteq \mathring{\theta}(Q) \subseteq \smile\delta(Q) \subseteq \theta(Q).$$

Ohne Beweis vermerken wir schließlich, daß hiervon die Systeme $\mu(Q)$, $\mathring{\delta}(Q)$, $\delta(Q)$ und $\theta(Q)$ dualisierungs-invariant sind, d. h. für $\xi \in \{\mu, \mathring{\delta}, \delta, \theta\}$ ist jeweils $\xi(Q^{\sim})$ isomorph zu $\xi(Q)^{\sim}$. Im Falle der Schnittvervollständigung $\delta(Q)$ und der Verbandsergänzung $\mathring{\delta}(Q)$ ist ein Isomorphismus gegeben durch die zueinander inversen Zuordnungen $Y \longmapsto Y^{\uparrow}$, $Z \longmapsto Z_{\downarrow}$.

3. Distributivgesetze und Ideale in Hüllenräumen

Auf die Bedeutung und Nützlichkeit einer Idealtheorie in Hüllenräumen hingewiesen zu haben, ist das vorrangige Verdienst von J. SCHMIDT [27], [28], [31]. Wir wollen im folgenden darlegen, wie sich das klassische Distributivgesetz für Verbände in die allgemeine Theorie der Hüllenräume einordnet. Die wesentlichen Resultate sind die Sätze 3.2 und 3.6, doch wird ihre Tragweite aufgrund des hohen Allgemeinheits- und Abstraktionsgrades erst aus den ordnungstheoretischen Anwendungen im vierten Abschnitt hervorgehen.

Im weiteren sei Γ stets ein Hüllenoperator auf der Menge X und $\downarrow$ der assoziierte Abschnittoperator, also

$$\downarrow Y = \bigcup \{\Gamma y : y \in Y\} \qquad (Y \subseteq X).$$

Eine leichte Rechnung ergibt die Identität

$$\Gamma Y = \downarrow \Gamma Y = \Gamma \downarrow Y \qquad (Y \subseteq X).$$

Ein Mengensystem $\mathfrak{Y}$ auf X heiße nun Γ-*treu*, falls

$$\bigcap \{\Gamma Y : Y \in \mathfrak{Y}\} = \Gamma(\bigcap \{\downarrow Y : Y \in \mathfrak{Y}\})$$

gilt. Hierbei genügt es, die Inklusion „$\subseteq$“ statt Gleichheit zu fordern, da die umgekehrte Inklusion aufgrund der Hülleneigenschaften von Γ stets erfüllt ist.

Ein nützliches Hilfsmittel bei der Gewinnung Γ-treuer Systeme ist

Lemma 3.1. *Seien* $\mathfrak{Y}$ *und* $\mathfrak{Z}$ *zwei Mengensysteme auf* X *derart, daß für jedes* $x \in X$ *die Systeme* $\{\{x\}\} \cup \mathfrak{Y}$ *und* $\{\{x\}\} \cup \mathfrak{Z}$ Γ*-treu sind. Dann gilt:*

(1) $A \cap \bigcap \{\Gamma Z : Z \in \mathfrak{Z}\} \subseteq \Gamma(A \cap \bigcap \{\downarrow Z : Z \in \mathfrak{Z}\})$ *für jeden unteren Abschnitt* A.
(2) $\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ *und* $\mathfrak{Y} \cup \mathfrak{Z}$ *sind ebenfalls* Γ*-treu.*

Beweis.

(1) Definitionsgemäß ist ein unterer Abschnitt A eine Vereinigung von Punktabschlüssen. Somit gilt:

$$A \cap \bigcap \{\Gamma Z : Z \in \mathfrak{Z}\} = \bigcup \{\Gamma x \cap \bigcap \{\Gamma Z : Z \in \mathfrak{Z}\} : x \in A\}$$
$$= \bigcup \{\Gamma(\downarrow x \cap \bigcap \{\downarrow Z : Z \in \mathfrak{Z}\}) : x \in A\} \subseteq \Gamma(\bigcup \{\downarrow x \cap \bigcap \{\downarrow Z : Z \in \mathfrak{Z}\} : x \in A\})$$
$$= \Gamma(A \cap \bigcap \{\downarrow Z : Z \in \mathfrak{Z}\}).$$

(2) $A = \bigcap \{\downarrow Y : Y \in \mathfrak{Y}\}$ und $B = \bigcap \{\Gamma Z : Z \in \mathfrak{Z}\}$ sind untere Abschnitte, da jedes $\downarrow Y$ und jedes ΓZ ein unterer Abschnitt ist. Indem wir nun (1) zweimal anwenden, erhalten wir

$$\bigcap \{\Gamma Y : Y \in \mathfrak{Y} \cup \mathfrak{Z}\} = \bigcap \{\Gamma Y : Y \in \mathfrak{Y}\} \cap B \subseteq$$
$$\Gamma(\bigcap \{\downarrow Y : Y \in \mathfrak{Y}\} \cap B) = \Gamma(A \cap \bigcap \{\Gamma Z : Z \in \mathfrak{Z}\}) \subseteq$$
$$\Gamma(\Gamma(A \cap \bigcap \{\downarrow Z : Z \in \mathfrak{Z}\})) = \Gamma(\bigcap \{\downarrow Y : Y \in \mathfrak{Y} \cup \mathfrak{Z}\}).$$

Die umgekehrte Inklusion gilt, wie schon bemerkt, in jedem Fall. Also ist $\mathfrak{Y} \cup \mathfrak{Z}$ Γ-treu. Für das System $\mathfrak{Z}$ folgt dies unmittelbar aus (1), indem man $A = X$ setzt, und für $\mathfrak{Y}$ schließt man analog. □

Ist $\mathfrak{M}$ ein beliebiges Mengensystem auf X, so setzen wir

$$\dot{\mathfrak{M}} := \mathfrak{M} \cup \{\{x\} : x \in X\},$$
$$\hat{\mathfrak{M}} := \cap \{\downarrow M : M \in \dot{\mathfrak{M}}\}.$$

In praktischen Anwendungen wird meist $\mathfrak{M} = \dot{\mathfrak{M}}$ sein (oder wenigstens $\{\downarrow M : M \in \mathfrak{M}\} = \{\downarrow M : M \in \hat{\mathfrak{M}}\}$). $\hat{\mathfrak{M}}$ besteht aus allen Durchschnitten über nichtleere endliche Systeme von unteren Abschnitten, die entweder Hauptideale sind oder von Mengen aus $\mathfrak{M}$ erzeugt werden. Nehmen wir zum Beispiel für $\mathfrak{M}$ das System $\mathfrak{E}X$ aller nichtleeren endlichen Teilmengen von X, so ist $\mathfrak{M}$ der kleinste Mengenverband, der alle Hauptideale enthält. Offenbar gilt ganz allgemein

$$\hat{\mathfrak{M}} = \hat{\hat{\mathfrak{M}}}.$$

Unser erstes Hauptresultat über Γ-treue Systeme ist nun

Satz 3.2. *Sei* (X,Γ) *ein Hüllenraum und* $\mathfrak{M}$ *ein beliebiges Mengensystem auf* X. *Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *Ist* $M \in \mathfrak{M}$ *und* $x \in \Gamma M$, *so existiert eine Menge* N *mit* $N \subseteq \downarrow M$ *und* $\downarrow x = \Gamma N$.
(b) $\downarrow x \cap \Gamma M = \Gamma(\downarrow x \cap \downarrow M)$ *für alle* $x \in X, M \in \mathfrak{M}$.

(c) *Jedes endliche Teilsystem von $\dot{\mathfrak{M}}$ ist Γ-treu.*

In allen drei Aussagen darf man $\mathfrak{M}$ durch $\hat{\mathfrak{M}}$ ersetzen. Außerdem kann man in (a) $N \in \hat{\mathfrak{M}}$ *wählen.*

Beweis.

(a) $\Rightarrow$ (b): Sei $y \in \downarrow x \cap \Gamma M$, $M \in \mathfrak{M}$. Dann existiert eine Menge $N \subseteq \downarrow M$ mit $\downarrow y = \Gamma N$. Es folgt $N \subseteq \Gamma N = \downarrow y \subseteq \downarrow x$, also $N \subseteq \downarrow x \cap \downarrow M$, und damit $y \in \Gamma N \subseteq \Gamma(\downarrow x \cap \downarrow M)$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Durch vollständige Induktion zeigen wir, daß für jedes endliche $\mathfrak{X} \subseteq \dot{\mathfrak{M}}$ und jedes $x \in X$ das System $\{\{x\}\} \cup \mathfrak{X}$ Γ-treu ist. Für $\mathfrak{X} = \emptyset$ und für $\mathfrak{X} = \{\{y\}\}$ ist dies trivial, und für $\mathfrak{X} = \{M\}$ mit $M \in \mathfrak{M}$ stimmt es nach Voraussetzung (a). Wir dürfen also annehmen, daß $\mathfrak{X}$ ein $n+1$-elementiges Teilsystem von $\dot{\mathfrak{M}}$ ist, etwa $\mathfrak{X} = \{M\} \cup \mathfrak{Z}$ mit $M \in \dot{\mathfrak{M}}$ und $|\mathfrak{Z}| = n$. Weiter können wir aufgrund der Induktionsvoraussetzung annehmen, daß die Systeme $\{\{x\}\} \cup \mathfrak{Z}$ und $\{\{x\},M\}$ Γ-treu sind. Wählen wir ein weiteres Element $y \in X$, so ist die Menge $A = \downarrow x \cap \downarrow y = \Gamma x \cap \Gamma y$ Γ-abgeschlossen, insbesondere also ein unterer Abschnitt. Lemma 3.2(1) liefert zunächst $\Gamma A \cap \Gamma M = A \cap \Gamma M \subseteq \Gamma(A \cap \downarrow M) \subseteq \Gamma A \cap \Gamma M$, d.h. $\Gamma x \cap \Gamma y \cap \Gamma M = \Gamma(\downarrow x \cap \downarrow y \cap \cap \downarrow M)$. Mit anderen Worten, das System $\{\{x\},\{y\},M\}$ ist Γ-treu. Nun kommt 3.2(2) zur Anwendung, und wir schließen, daß für jedes $y \in X$ das System $\{\{y\},M\} \cup \mathfrak{Z} = \{\{y\}\} \cup \mathfrak{Z}$ Γ-treu ist. Damit ist der Induktionsbeweis beendet. Die Aussage (c) ergibt sich nun sofort durch Vereinigung über alle Hauptideale $\downarrow x$.

(c) $\Rightarrow$ (b): Klar.

Es bezeichne $(\hat{b})$ diejenige Aussage, welche aus (b) bei Ersetzung von $\mathfrak{M}$ durch $\hat{\mathfrak{M}}$ entsteht. Aus dem zuvor Bewiesenen resultiert unmittelbar die Implikation

(c) $\Rightarrow$ $(\hat{b})$: Zu $M \in \hat{\mathfrak{M}}$ gibt es ein endliches Teilsystem $\mathfrak{Y}$ von $\dot{\mathfrak{M}}$ mit $M = \bigcap \{\downarrow Y : Y \in \mathfrak{Y}\}$, und da das System $\{\{x\}\} \cup \mathfrak{Y}$ Γ-treu ist, folgt $\downarrow x \cap \Gamma M \subseteq \Gamma x \cap \bigcap \{\Gamma Y : Y \in \mathfrak{Y}\} = \Gamma(\downarrow x \cap \bigcap \{\downarrow Y : Y \in \mathfrak{Y}\}) = \Gamma(\downarrow x \cap M) = \Gamma(\downarrow x \cap \downarrow M)$.

$(\hat{b})$ $\Rightarrow$ (a): Für $M \in \mathfrak{M}$ liegt der Abschnitt $\downarrow M$ in $\hat{\mathfrak{M}}$, und für $x \in \Gamma M$ folgt $\downarrow x = \downarrow x \cap \Gamma M = \Gamma(\downarrow x \cap \downarrow M) = \Gamma N$, wobei $N = \downarrow x \cap \downarrow M$ eine in $\downarrow M$ enthaltene Menge aus $\hat{\mathfrak{M}}$ ist. $\square$

Ein Hüllenraum, der die äquivalenten Bedingungen in Satz 3.2 erfüllt, heiße *endlich $\mathfrak{M}$-distributiv.* (Das Attribut „endlich" fügen wir zur Unterscheidung von Hüllenräumen bei, in denen *beliebige* Teilsysteme von $\dot{\mathfrak{M}}$ Γ-treu sind; vgl. [6]).

Zunächst wollen wir uns dem Spezialfall $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}X$ zuwenden, der bereits eine Vielzahl nützlicher Anwendungen beinhaltet. Definitionsgemäß ist ein Hüllenraum (X,Γ) genau dann $\mathfrak{P}X$-distributiv, wenn jedes seiner Elemente x *Γ-distributiv* ist, d.h. die Gleichung

$$\downarrow x \cap \Gamma Y = \Gamma(\downarrow x \cap \downarrow Y)$$

für jede Teilmenge Y von X erfüllt. Wegen $\Gamma Y = \Gamma \downarrow Y$ ist dies gleichbedeutend mit der Forderung, daß

$$\downarrow x \cap \Gamma A = \Gamma(\downarrow x \cap A)$$

für jeden unteren Abschnitt A gilt. Diesen allgemeinen Begriff der Γ-Distributivität kann man nun leicht auf das „klassische" unendliche Distributivgesetz in Verbänden zurückführen, indem man ausnützt, daß jedes Hüllensystem ein vollständiger Verband ist:

Korollar 3.3. *Für einen Hüllenraum* (X,Γ) *und das zugehörige Hüllensystem* $\mathfrak{X}$ *sind äquivalent:*

(a) *Ist* $x \in \Gamma M$, *so existiert ein* $N \subseteq \downarrow M$ *mit* $\downarrow x = \Gamma N$.
(b) *Jedes Element von* X *ist* Γ*-distributiv.*
(c) Γ *erhält endliche Durchschnitte unterer Abschnitte.*
(d) Γ *induziert einen Verbandshomomorphismus von der* A*-Topologie der unteren Abschnitte auf das Hüllensystem* $\mathfrak{X}$.
(e) $\mathfrak{X}$ *ist ein* $\bigvee$*-distributiver Verband.*

Diese Äquivalenzen ergeben sich sofort aus 3.2, 2.1 und 2.2. (Vgl. [15, Thm. 3.4]).

Eine natürliche Verallgemeinerung des Idealbegriffs erhält man auf folgende Weise (vgl. [31]): Für einen Hüllenraum (X,Γ) und ein Mengensystem $\mathfrak{M}$ auf X definieren wir den $\mathfrak{M}$-*Idealoperator*

$$\Gamma_{\mathfrak{M}} : \mathfrak{P}X \longrightarrow \mathfrak{P}X,\ Y \longmapsto \bigcup \{\Gamma M : M \in \dot{\mathfrak{M}},\ M \subseteq Y\}.$$

Ein solcher Operator ist zwar stets isoton und extensiv, aber im allgemeinen leider nicht idempotent, also kein Hüllenoperator. Dennoch ist in jedem Falle das System

$$\mathcal{C}\ell(\Gamma_{\mathfrak{M}}) = \{Y \subseteq X : \Gamma_{\mathfrak{M}} Y = Y\}$$

der $\Gamma_{\mathfrak{M}}$-abgeschlossenen Mengen (im folgenden $\mathfrak{M}$-*Ideale* genannt) stets ein Hüllensystem (vgl. TARSKI [36, Th. 29]). Den zugehörigen Hüllenoperator bezeichnen wir mit $\hat{\Gamma}_{\mathfrak{M}}$. Es gilt also genau dann $\Gamma_{\mathfrak{M}} = \hat{\Gamma}_{\mathfrak{M}}$, wenn $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ bereits idempotent ist. Drei Beispiele solcher idempotenten $\mathfrak{M}$-Idealoperatoren (wobei Γ der Schnittoperator Δ einer quasigeordneten Menge ist) haben wir bereits kennengelernt:

den Schnittoperator $\Delta = \Delta_{\mathfrak{P}X}$,
den Idealoperator $I = \Delta_{\mathfrak{F}X}$
und den Abschnittoperator $\downarrow = \Delta_{\emptyset}$.

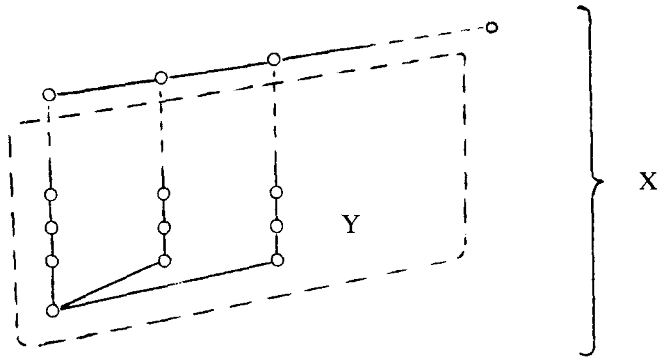
Allgemein fällt für einen beliebigen Hüllenoperator Γ über X der Operator $\Gamma_{\mathfrak{P}X}$ mit Γ zusammen, und $\Gamma_{\emptyset}$ ist der Abschnittoperator ↓. Daher sind die unteren Abschnitte nichts anderes als die ∅-Ideale, und es gilt

$$\mathcal{C}\ell(\Gamma_{\emptyset}) = \urcorner\bigcup \mathcal{C}\ell(\Gamma).$$

Der $\mathfrak{F}$-Idealoperator $\Gamma_{\mathfrak{F}X}$ erweist sich sogar stets als algebraischer Hüllenoperator, und die algebraischen Hüllenoperatoren sind genau diejenigen, welche die Gleichung $\Gamma = \Gamma_{\mathfrak{F}X}$ erfüllen.

Ein anderes wichtiges Beispiel eines (im allgemeinen *nicht* idempotenten) $\mathfrak{M}$-Idealoperators erhält man, indem man für $\mathfrak{M}$ alle gerichteten Teilmengen einer quasigeordneten Menge und für Γ den Schnittoperator Δ nimmt. Im Falle eines vollständigen Verbandes sind die $\mathfrak{M}$-Ideale dann genau die in der sogenannten *Scott-Topologie* abgeschlossenen Mengen, welche in der Theorie der *stetigen Verbände* eine besondere Rolle spielen (siehe etwa [5]). Wir können nicht auf Details dieser Anwendung eingehen, wollen aber wenigstens ein Beispiel angeben, wo $\Delta_{\mathfrak{M}}$ nicht idempotent ist:

Beispiel 3.4. Für den im nachfolgenden Diagramm skizzierten vollständigen Verband $V = (X, \leqq)$ sei $\mathfrak{M}$ das System aller gerichteten Teilmengen.



Hier gilt $\Delta_{\mathfrak{M}} Y = X \setminus \{1\}$, aber $\Delta_{\mathfrak{M}} \Delta_{\mathfrak{M}} Y = X$.

Wir vermerken noch, daß jeder der Hüllenoperatoren $\hat{\Gamma}_{\mathfrak{M}}$ dieselbe Quasiordnung wie Γ induziert, d.h. die gleichen Punktabschlüsse hat. Allgemeiner gilt

$$\hat{\Gamma}_{\mathfrak{M}} M = \Gamma_{\mathfrak{M}} M = \Gamma M \text{ für jedes } M \in \dot{\mathfrak{M}}.$$

Definitionsgemäß sind die $\mathfrak{M}$-Ideale genau diejenigen unteren Abschnitte, welche mit $M \in \mathfrak{M}$ auch den Abschluß ΓM enthalten. Insbesondere ist jede Γ-abgeschlossene Menge ein $\mathfrak{M}$-Ideal.

In Anbetracht der Tatsache, daß $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ nicht immer ein Hüllenoperator ist, können wir Korollar 3.3 nicht unmittelbar auf $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ anstelle von Γ anwenden. Glücklicherweise übertragen sich jedoch die zur Diskussion stehenden Homomorphie-Eigenschaften von $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ auf $\hat{\Gamma}_{\mathfrak{M}}$. Nennen wir ein Element x $\Gamma_{\mathfrak{M}}$*-distributiv,* falls

$$\downarrow x \cap \Gamma_{\mathfrak{M}} A = \Gamma_{\mathfrak{M}} (\downarrow x \cap A)$$

für jeden Abschnitt A erfüllt ist, so gilt:

Lemma 3.5.

(1) *Jedes* $\Gamma_{\mathfrak{M}}$*-distributive Element ist auch* $\hat{\Gamma}_{\mathfrak{M}}$*-distributiv.*
(2) *Erhält* $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ *endliche Durchschnitte unterer Abschnitte, so auch* $\hat{\Gamma}_{\mathfrak{M}}$.

Beweis.

(1) Für festes x betrachten wir die Menge $\mathfrak{S}$ aller isotonen und extensiven Abbildungen $\Phi : \mathfrak{P}X \longrightarrow \mathfrak{P}X$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:

(i) Für jeden Abschnitt A ist auch ΦA ein Abschnitt, und
$\downarrow x \cap \Phi A = \Phi(\downarrow x \cap A)$.
(ii) $\Gamma_{\mathfrak{M}} \sqsubseteq \Phi \sqsubseteq \hat{\Gamma}_{\mathfrak{M}}$.

Dabei bedeute $\Phi \sqsubseteq \Psi$, daß für jede Teilmenge Y von X das Bild ΦY in ΨY enthalten ist. Setzen wir x als $\Gamma_{\mathfrak{M}}$-distributiv voraus, so gehört $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ zu $\mathfrak{S}$, und das gleiche gilt offenbar für die durch

$$\Psi Y = \bigcup \{\Phi Y : \Phi \in \mathfrak{S}\}$$

definierte Abbildung Ψ. Wir zeigen, daß auch $\Psi \circ \Psi$ ein Element von $\mathfrak{S}$ ist:
(i) Für jeden Abschnitt A ist auch ΨA und damit $\Psi\Psi A$ ein Abschnitt, und es gilt
$\downarrow x \cap \Psi\Psi A = \Psi(\downarrow x \cap \Psi A) = \Psi\Psi(\downarrow x \cap A)$.
(ii) Da Ψ isoton und extensiv ist, folgt
$\Gamma_{\mathfrak{M}} \sqsubseteq \Psi \sqsubseteq \Psi \circ \Psi \sqsubseteq \hat{\Gamma}_{\mathfrak{M}} \circ \hat{\Gamma}_{\mathfrak{M}} = \hat{\Gamma}_{\mathfrak{M}}$.
Nun ist Ψ aber das größte Element von $\mathfrak{S}$, so daß $\Psi \circ \Psi$ mit Ψ zusammenfallen muß. Mit anderen Worten, Ψ ist ein Hüllenoperator. Andererseits impliziert die Inklusion $\Gamma_{\mathfrak{M}}\Psi Y \subseteq \Psi\Psi Y = \Psi Y$, daß ΨY ein Y umfassendes $\mathfrak{M}$-Ideal ist; folglich ist auch $\hat{\Gamma}_{\mathfrak{M}} Y$ in ΨY enthalten. Insgesamt zeigt dies, daß $\hat{\Gamma}_{\mathfrak{M}} = \Psi$ zu $\mathfrak{S}$ gehört, und daher ist x $\hat{\Gamma}_{\mathfrak{M}}$-distributiv.

(2) Erhält $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ endliche Durchschnitte unterer Abschnitte, so gilt insbesondere

$$\downarrow x \cap \Gamma_{\mathfrak{M}} A = \Gamma_{\mathfrak{M}} \downarrow x \cap \Gamma_{\mathfrak{M}} A = \Gamma_{\mathfrak{M}}(\downarrow x \cap A) \qquad \text{für jedes } x \in X,$$

und mit (1) folgt, daß alle Elemente von X $\hat{\Gamma}_{\mathfrak{M}}$-distributiv sind. Korollar 3.3 liefert nun die Behauptung. □

Nach diesen Vorbereitungen können wir eine nützliche Verallgemeinerung von Korollar 3.3 zeigen:

Satz 3.6. *Für einen Hüllenraum* (X,Γ) *und ein Mengensystem* $\mathfrak{M}$ *auf* X *betrachten wir die nachfolgenden sieben Bedingungen:*

(a') *Ist* $M \in \mathfrak{M}$ *und* $x \in \Gamma M$, *so existiert ein* $N \in \dot{\mathfrak{M}}$ *mit* $N \subseteq \downarrow M$ *und* $\downarrow x = \Gamma N$.
(b'),(b^) *Jedes Element aus* X *ist* $\Gamma_{\mathfrak{M}}$- *(bzw.* $\hat{\Gamma}_{\mathfrak{M}}$-*) distributiv.*
(c'),(c^) $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ *(bzw.* $\hat{\Gamma}_{\mathfrak{M}}$*) erhält endliche Durchschnitte unterer Abschnitte.*
(d) $\hat{\Gamma}_{\mathfrak{M}}$ *induziert einen Verbandshomomorphismus von dem Hüllensystem* $\mathcal{C}\ell(\Gamma_{\mathfrak{E}})$ *der unteren Abschnitte auf das Hüllensystem* $\mathcal{C}\ell(\Gamma_{\mathfrak{M}})$ *der* $\mathfrak{M}$-*Ideale.*
(e) $\mathcal{C}\ell(\Gamma_{\mathfrak{M}})$ *ist ein* $\bigvee$-*distributiver Verband.*

Die folgenden Implikationen gelten stets:

$$(c') \Rightarrow (a') \Leftrightarrow (b') \Rightarrow (b\hat{\ }) \Leftrightarrow (c\hat{\ }) \Leftrightarrow (d) \Leftrightarrow (e).$$

Jede dieser Bedingungen ist hinreichend für endliche $\mathfrak{M}$-*Distributivität des Hüllenraumes* (X,Γ), *im Falle* $\mathfrak{M} = \hat{\mathfrak{M}}$ *auch notwendig.*

Wenn $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ *idempotent ist, sind alle sieben Bedingungen äquivalent.*

Beweis. Die Implikationskette (c') $\Rightarrow$ (b') $\Rightarrow$ (b^) $\Leftrightarrow$ (c^) $\Leftrightarrow$ (d) $\Leftrightarrow$ (e) haben wir bereits gezeigt (siehe 3.3 und 3.5).

(a') $\Rightarrow$ (b'): Sei A ein unterer Abschnitt und $y \in \downarrow x \cap \Gamma_{\mathfrak{M}} A$. Dann finden wir ein $M \in \dot{\mathfrak{M}}$ mit $M \subseteq A$ und $y \in \Gamma M$, und hierzu ein $N \in \dot{\mathfrak{M}}$ mit $N \subseteq \downarrow M$ und $\downarrow y = \Gamma N$. Es folgt $N \subseteq \Gamma N = \downarrow y \subseteq \downarrow x$ und $N \subseteq \downarrow M \subseteq \downarrow A = A$, also insgesamt $N \subseteq \downarrow x \cap A$ und damit $y \in \Gamma N \subseteq \Gamma_{\mathfrak{M}}(\downarrow x \cap A)$. Dies zeigt die Inklusion $\downarrow x \cap \Gamma_{\mathfrak{M}} A \subseteq \Gamma_{\mathfrak{M}}(\downarrow x \cap A)$.

(b') $\Rightarrow$ (a'): Für $M \in \mathfrak{M}$ gilt offenbar $\Gamma M = \Gamma_{\mathfrak{M}} M$, und $x \in \Gamma M$ impliziert $x \in \downarrow x \cap \Gamma_{\mathfrak{M}} M = \Gamma_{\mathfrak{M}}(\downarrow x \cap \downarrow M)$, d.h. $x \in \Gamma N$ für ein $N \in \dot{\mathfrak{M}}$ mit $N \subseteq \downarrow x \cap \downarrow M$. Dann ist aber bereits $\downarrow x \subseteq \Gamma N \subseteq \Gamma \downarrow x = \downarrow x$, also $\downarrow x = \Gamma N$.

Um zu sichern, daß jede dieser Bedingungen endliche $\mathfrak{M}$-Distributivität zur Folge hat, genügt es, aus (b^) die Gleichung

$$\text{(b)}\quad \downarrow x \cap \Gamma M = \Gamma(\downarrow x \cap \downarrow M) \qquad \text{für } x \in X,\ M \in \mathfrak{M}$$

abzuleiten. Dies ergibt sich aber sofort aus der Tatsache, daß $\Gamma M = \Gamma_{\mathfrak{M}} M = \hat{\Gamma}_{\mathfrak{M}} M$ für jedes $M \in \mathfrak{M}$ gilt.

Im Falle $\mathfrak{M} = \widehat{\mathfrak{M}}$ läßt sich aus der Charakterisierung 3.2(c) der endlichen $\mathfrak{M}$-Distributivität des Hüllensystems (X,Γ) leicht die Bedingung (c') folgern.

Die letzte Aussage in Satz 3.6 ist klar, da ein idempotentes $\Gamma_{\mathfrak{M}}$ mit $\hat{\Gamma}_{\mathfrak{M}}$ übereinstimmt. □

Wegen $\widehat{\mathfrak{M}} = \widehat{\widehat{\mathfrak{M}}}$ erhalten wir nun sofort

Korollar 3.7. Ein Hüllenraum (X,Γ) *ist genau dann endlich* $\mathfrak{M}$*-distributiv, wenn das Hüllensystem der* $\widehat{\mathfrak{M}}$*-Ideale* $\bigvee$*-distributiv ist.*

Wir werden in 4.13 ein Beispiel diskutieren, aus dem hervorgeht, daß man in 3.7 $\widehat{\mathfrak{M}}$ *nicht* durch $\mathfrak{M}$ ersetzen darf. Unter Ausnutzung des bekannten Satzes, daß für ein *algebraisches* Hüllensystem Distributivität und $\bigvee$-Distributivität gleichbedeutend sind und daß der zugehörige Hüllenoperator Γ mit dem Idealoperator $\Gamma_{\mathfrak{J}X}$ übereinstimmt, gelangen wir schließlich zu

Korollar 3.8. Ein algebraisches Hüllensystem mit zugehörigem Hüllenoperator Γ *über* X *ist genau dann* ($\bigvee$-)*distributiv, wenn für jede endliche Teilmenge* Y *von* X *und jedes* $x \in \Gamma Y$ *eine endliche Teilmenge* Z *von* $\downarrow Y$ *mit* $\Gamma x = \Gamma Z$ *existiert.*

Dieses Korollar kann man zum Beispiel auf das Hüllensystem der Untermoduln eines Moduls anwenden, dessen sämtliche endlich erzeugten Untermoduln zyklisch sind. Für solche „lokal zyklischen" Moduln ist also der Untermodulverband distributiv.

4. Distributivgesetze in quasigeordneten Mengen

Bei der Ausdehnung von Distributivgesetzen auf quasigeordnete Mengen lassen wir uns durch die beiden Ersetzungsregeln leiten, welche verbandstheoretische Gleichungen in entsprechende Identitäten für den Schnittoperator „transformieren":

$$x = \bigvee Y \Leftrightarrow \Delta x = \Delta Y,$$
$$x = \bigwedge Y \Leftrightarrow \Delta x = \bigcap \{\Delta y : y \in Y\}.$$

Zur Formulierung allgemeinster Distributivgesetze ist das Konzept der *Auswahlmengen* von besonderem Nutzen. Betrachten wir etwa das erweiterte Distributivgesetz

$$(w \vee x) \wedge (y \vee z) = (w \wedge y) \vee (w \wedge z) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

so sehen wir, daß auf der rechten Seite all diejenigen Mengen gebildet werden, welche aus jedem der beiden Klammerausdrücke der linken Seite ein Element „auswählen". Gehen wir nun zu einem beliebigen Mengensystem $\mathfrak{Y}$ auf X über, so heißt jede Abbildung $\psi : \mathfrak{Y} \longrightarrow \bigcup \mathfrak{Y}$ mit $\psi(Y) \in Y$ für alle $Y \in \mathfrak{Y}$ eine *Auswahlfunktion,* und ihr Bild $\psi[\mathfrak{Y}]$ eine *Auswahlmenge.* Die Gesamtheit aller Auswahlmengen für das System $\mathfrak{Y}$ bezeichnen wir mit $\dot{\mathfrak{Y}}$. Weiter sei $\overline{\mathfrak{Y}}$ das System aller in X enthaltenen Obermengen von Mengen aus $\mathfrak{Y}$, also der von $\mathfrak{Y}$ im Potenzmengenverband $\mathfrak{P}X$ erzeugte obere Abschnitt. Man nennt $\overline{\mathfrak{Y}}$ den *von* $\mathfrak{Y}$ *erzeugten Stapel.* Schließlich definiert man den *Verzahnungsoperator* $\sqcap$ durch

$$\overset{\sqcap}{\mathfrak{Y}} := \{Z \subseteq X : Y \cap Z \neq \emptyset \quad \text{für jedes } Y \in \mathfrak{Y}\}.$$

Eine einfache Rechnung ergibt ·

$$\overset{\sqcap}{\mathfrak{Y}} = \overline{\dot{\mathfrak{Y}}} \text{ und } \overset{\sqcap}{\overset{\sqcap}{\mathfrak{Y}}} = \overline{\mathfrak{Y}}.$$

Indem wir beachten, daß für ein beliebiges Mengensystem $\mathfrak{Y}$ auf einem vollständigen Verband die Gleichung

$$\bigcap \{\downarrow Y : Y \in \mathfrak{Y}\} = \downarrow \{\bigwedge Z : Z \in \dot{\mathfrak{Y}}\}$$

besteht, erhalten wir einen fundamentalen Zusammenhang zwischen Δ-treuen Systemen und gewissen Distributivgesetzen:

Lemma 4.1. Sei $V = (X, \leqq)$ *ein vollständiger Verband mit Schnittoperator* Δ. *Für ein System* $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{P}X$ *ist das Distributivgesetz*

$$\text{(D)} \quad \bigwedge \{\bigvee Y : Y \in \mathfrak{Y}\} = \bigvee \{\bigwedge Z : Z \in \dot{\mathfrak{Y}}\}$$

genau dann erfüllt, wenn $\mathfrak{Y}$ Δ*-treu ist.*

Hierbei darf man $\mathfrak{Y}$ *durch* $\overline{\mathfrak{Y}}$ *und* $\dot{\mathfrak{Y}}$ *durch* $\overset{\sqcap}{\mathfrak{Y}}$ *ersetzen.*

Beweis. Einerseits gilt

$$\Delta(\bigwedge\{\bigvee Y : Y \in \mathfrak{Y}\}) = \bigcap\{\Delta \bigvee Y : Y \in \mathfrak{Y}\} = \bigcap \{\Delta Y : Y \in \mathfrak{Y}\},$$

andererseits

$$\Delta\{\bigwedge Z : Z \in \dot{\mathfrak{Y}}\} = \Delta\downarrow\{\bigwedge Z : Z \in \dot{\mathfrak{Y}}\} = \Delta(\bigcap\{\downarrow Y : Y \in \mathfrak{Y}\}).$$

Somit sind äquivalent:

(a) $\bigwedge \{\bigvee Y : Y \in \mathfrak{Y}\} = \bigvee \{\bigwedge Z : Z \in \dot{\mathfrak{Y}}\}$,

(b) $\Delta(\bigwedge\{\bigvee Y : Y \in \mathfrak{Y}\}) = \Delta\{\bigwedge Z : Z \in \dot{\mathfrak{Y}}\}$,

(c) $\bigcap \{\Delta Y : Y \in \mathfrak{Y}\} = \Delta(\bigcap\{\downarrow Y : Y \in \mathfrak{Y}\})$. □

Sind alle in 4.1 auftretenden Mengen endlich und nichtleer, so kann offenbar auf die Vollständigkeits-Voraussetzung verzichtet werden.

Nennen wir nun eine quasigeordnete Menge $(X, \leqq)$ *endlich* $\mathfrak{M}$*-distributiv*, wenn der assoziierte Hüllenraum (X, Δ) diese Eigenschaft hat (d.h. jedes endliche Teilsystem von $\mathfrak{M}$ Δ-treu ist), so liefert Lemma 4.1 in Verbindung mit Satz 3.2:

Korollar 4.2. *Ein vollständiger Verband* $V = (X, \leqq)$ *ist genau dann endlich* $\mathfrak{M}$*-distributiv, wenn*

$$x \wedge \bigvee M = \bigvee (x \wedge M)$$

für jedes $x \in X$ *und jedes* $M \in \mathfrak{M}$ *gilt, bzw. wenn* (D) *für jedes endliche Teilsystem* $\mathfrak{Y}$ *von* $\dot{\mathfrak{M}}$ *erfüllt ist.*

Speziell heiße eine quasigeordnete Menge Q *stark distributiv*, falls jedes ihrer Elemente Δ-distributiv ist. Entsprechend heiße Q *idealdistributiv*, wenn jedes ihrer Elemente I-distributiv ist (wobei wie vorher I den Idealoperator bezeichnet).

Korollar 4.3. *Ein Verband ist genau dann (ideal)distributiv, wenn*

$$\downarrow x \cap \Delta Y = \Delta(\downarrow x \cap \downarrow Y)$$

für jedes Element x *und jede endliche Teilmenge* Y *gilt. Für vollständige Verbände sind die Eigenschaften „$\bigvee$-distributiv" und „stark distributiv" gleichwertig.* (Vgl. [15]).

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen macht es keine Mühe, eine ganze Reihe von Sätzen herzuleiten, die gewisse Typen endlicher $\mathfrak{M}$-Distributivität durch Distributivgesetze für geeignete Vervollständigungen beschreiben. Dabei wenden wir die Resultate des dritten Abschnitts jeweils auf den Schnittoperator Δ oder auf den Idealoperator I an. Aus 3.3 ergibt sich sofort für $\Gamma = \Delta$:

Satz 4.4. *Für eine quasigeordnete Menge* Q *sind äquivalent:*

(a) *Ist* A *ein unterer Abschnitt und* $x \in \Delta A$, *so existiert eine in* A *enthaltene Menge, für die* x *kleinste obere Schranke ist.*
(b) Q *ist stark distributiv.*
(c) *Der Schnittoperator* Δ *erhält endliche Durchschnitte unterer Abschnitte.*
(d) Δ *induziert einen Verbandshomomorphismus von der Abschnittvervollständigung* $\theta(Q)$ *auf die Schnittvervollständigung* $\delta(Q)$.
(e) $\delta(Q)$ *ist ein* $\bigvee$*-distributiver Verband.*

Insbesondere ist ein vollständiger Verband genau dann $\bigvee$*-distributiv, wenn er das Bild einer (A-)Topologie unter einem Verbandshomomorphismus ist, der beliebige Suprema erhält.*

KATRIŇÁK [22] nennt einen $\vee$-Halbverband distributiv, falls zu je drei Elementen x,y,z, die $x \leqq x \vee z$, aber weder $x \leqq y$ noch $x \leqq z$ erfüllen, zwei weitere Elemente $y_1 \leqq y$ und $z_1 \leqq z$ existieren mit $x = y_1 \vee z_1$. Durch vollständige Induktion verifiziert man leicht, daß diese Bedingung zu der folgenden gleichwertig ist: Zu jeder endlichen Teilmenge $Y \neq \emptyset$ und jedem $x \leqq \bigvee Y$ existiert eine endliche Menge $Z \subseteq \downarrow Y$ mit $x = \bigvee Z$. Die von KATRIŇÁK bemerkte Tatsache, daß ein $\vee$-Halbverband genau dann distributiv ist, wenn dies für seinen Idealverband zutrifft, gestattet folgende Verallgemeinerung:

Satz 4.5. *Für eine quasigeordnete Menge* Q *sind äquivalent:*

(a) *Ist* A *ein endlich erzeugter unterer Abschnitt und* $x \in \Delta A$, *so existiert eine in* A *enthaltene endliche Menge, für die* x *kleinste obere Schranke ist.*
(b) Q *ist idealdistributiv.*
(c) *Der Idealoperator* I *erhält endliche Durchschnitte unterer Abschnitte.*
(d) I *induziert einen Verbandshomomorphismus von der Abschnittvervollständigung* $\theta(Q)$ *auf die Idealvervollständigung* $\iota(Q)$.
(e) $\iota(Q)$ *ist* $\bigvee$*-distributiv.*
(f) $\iota(Q)$ *ist distributiv.*

Dies folgt sofort aus Satz 3.6, indem man für Γ den Schnittoperator Δ und für $\mathfrak{M}$ das System $\mathfrak{F}X$ aller endlichen Teilmengen nimmt. Zur Äquivalenz von (e) und (f) siehe 3.8. □

Korollar 4.6. *Eine quasigeordnete Menge* Q *ist genau dann stark distributiv, wenn dies für die Schnittvervollständigung* $\delta(Q)$ *zutrifft. Entsprechend ist* Q *genau dann idealdistributiv, wenn dies für die Idealvervollständigung* $\iota(Q)$ *gilt.*

Hingegen ist die Schnittvervollständigung einer idealdistributiven quasigeordneten Menge im allgemeinen nicht mehr (ideal)distributiv. Wie FUNAYAMA [19] (vgl. [15] und [12, S. 71]) gezeigt hat, braucht nicht einmal die Schnittvervollständigung eines distributiven *Verbandes* distributiv zu sein. Andererseits bewies bereits STONE [34], [35], daß *die Schnittvervollständigung eines Booleschen (d.h. komplementären distributiven) Verbandes stets wieder distributiv ist.* Woran dies liegt, sieht man anhand der hüllentheoretischen Beschreibung der Distributivgesetze sofort ein: *Jeder Boolesche Verband und allgemeiner jeder Brouwersche Verband* V *ist stark distributiv, seine Schnittvervollständigung also sogar* $\bigvee$*-distributiv.* Dabei heißt ein Verband $V=(X,\leqq)$ *Brouwersch,* falls für je zwei Elemente $x,z \in X$ ein Element $z:x$ (genannt *relatives Pseudokomplement)* existiert, so daß die folgende Äquivalenz besteht:

$$x \wedge y \leqq z \Leftrightarrow y \leqq z:x.$$

Die starke Distributivität Brouwerscher Verbände ist eine unmittelbare Folge von

Lemma 4.7. *Für je zwei Elemente* x,z *eines Verbandes* $V=(X,\leqq)$ *sei* I_x^z *die Menge aller* $y \in X$ *mit* $x \wedge y \leqq z$. *Dann gilt:*

(a) V *ist genau dann (ideal)distributiv, wenn jedes* I_x^z *ein Ideal ist.*
(b) V *ist genau dann stark distributiv, wenn jedes* I_x^z ein Schnitt ist.
(c) V *ist genau dann Brouwersch, wenn jedes* I_x^z *ein Hauptideal ist.*

Die letzte Aussage ist klar nach Definition. Die anderen beiden sind Spezialfälle von

Satz 4.8. *Für je zwei Elemente* x,z *einer quasigeordneten Menge* $Q=(X,\leqq)$ *sei* I_x^z *die Menge aller* $y \in X$ *mit* $\downarrow x \cap \downarrow y \subseteq \downarrow z$. *Dann gilt für ein beliebiges Mengensystem* $\mathfrak{M}$ *auf* X:

Q *ist genau dann endlich* $\mathfrak{M}$*-distributiv, wenn jede der Mengen* I_x^z *ein* $\mathfrak{M}$*-Ideal des Hüllenraumes* (X,Δ) *ist.*

Beweis. Daß I_x^z stets ein unterer Abschnitt ist, bedarf keiner Erklärung. Sei Q (d.h. (X,Δ)) endlich $\mathfrak{M}$-distributiv. Ist $M\in\mathring{\mathfrak{M}}$ eine Teilmenge von I_x^z, so gilt $\downarrow x\cap\downarrow y\subseteq\downarrow z$ für jedes $y\in M$, und damit $\downarrow x\cap\downarrow M\subseteq\downarrow z$. Es folgt $\downarrow x\cap\Delta M=\Delta(\downarrow x\cap\downarrow M)\subseteq\Delta\downarrow z=\downarrow z$. Insbesondere hat man für jedes $y\in\Delta M$ die Inklusion $\downarrow x\cap\downarrow y\subseteq\downarrow z$, d.h. ΔM ist in I_x^z enthalten.

Sei umgekehrt vorausgesetzt, daß jedes I_x^z ein $\mathfrak{M}$-Ideal ist. Für $x\in X$ und $M\in\mathring{\mathfrak{M}}$ haben wir zu zeigen, daß die Menge $\downarrow x\cap\Delta M$ in $\Delta(\downarrow x\cap\downarrow M)=\bigcap\{\downarrow z:\downarrow x\cap\downarrow M\subseteq\downarrow z\}$ enthalten ist. Wie wir soeben sahen, ist aber $\downarrow x\cap\downarrow M\subseteq\downarrow z$ gleichbedeutend mit $M\subseteq I_x^z$, und daraus folgt $\Delta M\subseteq I_x^z$, d.h. $\downarrow x\cap\Delta M\subseteq\downarrow z$. □

Aus 4.7 ergibt sich noch als unmittelbare Folgerung der bekannte Satz, daß *die vollständigen Brouwerschen Verbände genau die* $\bigvee$*-distributiven sind* (vgl. BIRKHOFF [9, Ch. V, Th. 24]). Weitere Beispiele stark distributiver Verbände sind alle Ketten, während zu den Brouwerschen Verbänden nur diejenigen Ketten gehören, die ein größtes Element besitzen.

Als nächstes geben wir einige Charakterisierungen quasigeordneter Mengen mit distributiver Schnittvervollständigung.

Satz 4.9. *Sei* $Q=(X,\leqq)$ *eine quasigeordnete Menge und* $\mathfrak{M}$ *das System aller nichtleeren endlichen Vereinigungen von unteren Schnitten. Dann ist* $\mathfrak{M}$ *ein Mengenverband, und die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(a) *Ist* $M\in\mathfrak{M}$ *und* $x\in\Delta M$, *so existiert eine Teilmenge von* M, *für die* x *die kleinste obere Schranke ist.*
(b) $\downarrow x\cap\Delta M=\Delta(\downarrow x\cap\downarrow M)$ *für jedes* $x\in X$ *und* $M\in\mathfrak{M}$.
(c) *Der Schnittoperator* Δ *erhält endliche Durchschnitte von Mengen aus* $\mathfrak{M}$.
(d) Δ *induziert einen Verbandshomomorphismus von* $\mathfrak{M}$ *auf* $\delta(Q)$.
(e) $\delta(Q)$ *ist ein distributiver Verband.*

Beweis. Die Aussagen (a), (b) und (c) sind nach 3.2 äquivalent und bedeuten gerade endliche $\mathfrak{M}$-Distributivität.

(c) ⇒ (d) ⇒ (e): Siehe 2.1 und 2.2.
(e) ⇒ (b): Sei $M\in\mathfrak{M}$, etwa $M=\bigcup\mathfrak{Y}$ mit $\mathfrak{Y}\subseteq\delta(Q)$. Dann berechnen wir in $\delta(Q)$:
$\downarrow x\cap\Delta M=\downarrow x\wedge\bigvee\mathfrak{Y}=\bigvee\{\downarrow x\cap Y: Y\in\mathfrak{Y}\}=$
$\Delta(\bigcup\{\downarrow x\cap Y: Y\in\mathfrak{Y}\})=\Delta(\downarrow x\cap M)$. □

Nennen wir eine quasigeordnete Menge, welche die äquivalenten Bedingungen in Satz 4.9 erfüllt, *schnittdistributiv*, so ist klar, daß für *vollständige* Verbände Distributivität und Schnittdistributivität gleichwertige Eigenschaften sind, während dies für beliebige Verbände nach den vorangegangenen Bemerkungen nicht mehr zutrifft. Weiter wissen wir aus Satz 4.9, daß *Schnittdistributivität eine sowohl selbstduale als auch*

„vervollständigungsinvariante" Eigenschaft ist, sich jedoch nicht als „natürliche Verallgemeinerung " des klassischen Distributivgesetzes

$$(d_\vee)\quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

eignet, da letzteres ja gerade *nicht* vervollständigungsinvariant ist. Als eine mit $(d_\vee)$ verträgliche Eigenschaft für quasigeordnete Mengen erweist sich gemäß Korollar 4.3 die Idealdistributivität. Doch ist diese leider, wei Beispiel 4.13 zeigen wird, *nicht selbstdual.* Eine andere konsistente Definition distributiver quasigeordneter Mengen erhält man, indem man das bewährte Ersetzungsrezept

$$x = y \vee z \Leftrightarrow \Delta x = \Delta\{y,z\}$$
$$x = y \wedge z \Leftrightarrow \Delta x = \Delta y \cap \Delta z$$

auf die Gleichung $(d_\vee)$ anwendet. Die transformierte Gleichung lautet dann:

$$\Delta x \cap \Delta\{y,z\} = \Delta({\downarrow}x \cap {\downarrow}\{y,z\}),$$

und wir wollen eine quasigeordnete Menge $Q = (X, \leqq)$ *schwach distributiv* nennen, wenn diese Identität für beliebige Elemente $x,y,z \in X$ erfüllt ist. Während der Beweis für die Selbstdualität des Distributivgesetzes in Verbänden schon bei DEDEKIND in drei Zeilen erledigt wurde, muß man sich im Falle beliebiger quasigeordneter Mengen einiges einfallen lassen, um die Selbstdualität der schwachen Distributivität herzuleiten. Als Schlüssel für alle Dualisierungsaussagen erweist sich

Satz 4.10. *Sei* $Q = (X, \leqq)$ *eine quasigeordnete Menge mit unterem Schnittoperator* Δ *und oberem Schnittoperator* ∇*. Für ein beliebiges Mengensystem* $\mathfrak{Y}$ *auf* X *sind dann die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(a) $\mathfrak{Y}$ *bzw.* $\bar{\mathfrak{Y}}$ *ist* Δ*-treu.*
(b) $\dot{\mathfrak{Y}}$ *bzw.* $\bar{\bar{\mathfrak{Y}}}$ *ist* ∇*-treu.*
(c) *Das Paar* $(\mathfrak{Y}^{\uparrow}{}_{\downarrow}, \dot{\mathfrak{Y}}_{\downarrow}{}^{\uparrow})$ *ist ein* DEDEKIND–MACNEILLE'*scher Schnitt.*
Dabei ist definitionsgemäß

$$\mathfrak{Y}_{\downarrow} := \bigcup \{Y_{\downarrow} : Y \in \mathfrak{Y}\},\ \mathfrak{Y}^{\uparrow} := \bigcup \{Y^{\uparrow} : Y \in \mathfrak{Y}\}.$$

Beweis. Zunächst gilt

$$\bigcap \{\Delta Y : Y \in \mathfrak{Y}\} = \bigcap \{Y^{\uparrow}{}_{\downarrow} : Y \in \mathfrak{Y}\} = (\bigcup \{Y^{\uparrow} : Y \in \mathfrak{Y}\})_{\downarrow} = \mathfrak{Y}^{\uparrow}{}_{\downarrow},$$
$$\text{und dual } \bigcap \{\nabla Z : Z \in \dot{\mathfrak{Y}}\} = \dot{\mathfrak{Y}}_{\downarrow}{}^{\uparrow}.$$

Andererseits ergibt eine Anwendung der unendlichen mengentheoretischen Distributivgesetze

$$\Delta(\bigcap \{{\downarrow}Y : Y \in \mathfrak{Y}\}) = (\bigcup \{Z_{\downarrow} : Z \in \dot{\mathfrak{Y}}\})^{\uparrow}{}_{\downarrow} = \dot{\mathfrak{Y}}_{\downarrow}{}^{\uparrow}{}_{\downarrow},$$
$$\text{und dual } \nabla(\bigcap \{{\uparrow}Z : Z \in \dot{\mathfrak{Y}}\}) = (\bigcup \{Y^{\uparrow} : Y \in \mathfrak{Y}\})_{\downarrow}{}^{\uparrow} = \mathfrak{Y}^{\uparrow}{}_{\downarrow}{}^{\uparrow}.$$

Somit sind die folgenden Bedingungen allesamt gleichbedeutend:

(a) $\bigcap \{\Delta Y : Y \in \mathfrak{Y}\} = \Delta(\bigcap \{{\downarrow}Y : Y \in \mathfrak{Y}\})$,
(a') $\mathfrak{Y}^{\uparrow}{}_{\downarrow} = \dot{\mathfrak{Y}}_{\downarrow}{}^{\uparrow}{}_{\downarrow}$,
(c) $(\mathfrak{Y}^{\uparrow}{}_{\downarrow}, \dot{\mathfrak{Y}}_{\downarrow}{}^{\uparrow})$ ist ein Dedekind–MacNeille'scher Schnitt.
(b') $\dot{\mathfrak{Y}}_{\downarrow}{}^{\uparrow} = \mathfrak{Y}^{\uparrow}{}_{\downarrow}{}^{\uparrow}$,
(b) $\bigcap \{\nabla Z : Z \in \dot{\mathfrak{Y}}\} = \nabla(\bigcap \{{\uparrow}Z : Z \in \dot{\mathfrak{Y}}\})$.

Offenbar kann man in (a) $\mathfrak{Y}$ durch $\overline{\mathfrak{Y}}$ und in (b) $\dot{\mathfrak{Y}}$ durch $\overline{\dot{\mathfrak{Y}}}$ ersetzen. □

Daß die zuvor als „schwache Distributivität" eingeführte Eigenschaft selbstdual ist, läßt sich nicht unmittelbar aus Satz 4.10 ableiten; denn für $\mathfrak{Y} = \{\{x\},\{y,z\}\}$ ist das Auswahlsystem $\overline{\dot{\mathfrak{Y}}} = \{\{x,y\},\{\dot{x},z\}\}$ im allgemeinen nicht von der gleichen Form wie $\mathfrak{Y}$. Durch Kombination mit Satz 3.2 kommt man jedoch zum Ziel: Ist jedes der Systeme $\mathfrak{Y} = \{\{x\},\{y,z\}\}$ ∇-treu, so auch jedes der Systeme $\{\{w,x\},\{y,z\}\}$; insbesondere gilt dies für Systeme der Form $\dot{\mathfrak{Y}}$, und mit 4.10 schließen wir, daß dann $\mathfrak{Y}$ Δ-treu ist. Dieses Dualisierungsargument wird entscheidend in den Beweis des folgenden Hauptsatzes eingehen:

Satz 4.11. *Für eine quasigeordnete Menge* $Q = (X, \leqq)$ *sind die folgenden Aussagen und die dazu dualen sämtlich äquivalent:*

(a) *Ist* A *ein endlich erzeugter Abschnitt und* $x \in \Delta A$, *so existiert eine in* A *enthaltene Menge, für die* x *kleinste obere Schranke ist.*
(b) $\downarrow x \cap \Delta A = \Delta(\downarrow x \cap A)$ *für jedes* $x \in X$ *und jeden endlich erzeugten Abschnitt* A.
(c) *Der Schnittoperator* Δ *erhält endliche Durchschnitte endlich erzeugter Abschnitte.*
(d) Δ *induziert einen Verbandshomomorphismus von dem kleinsten alle Hauptideale enthaltenden Mengenverband* $\mathring{\theta}(Q)$ *auf die Verbandsergänzung* $\mathring{\delta}(Q)$, *d.h. den von den Hauptidealen erzeugten Unterverband der Schnittvervollständigung.*
(e) $\mathring{\delta}(Q)$ *ist ein distributiver Verband.*
(f) Q *ist schwach distributiv.*

Beweis. Die Äquivalenz von (a), (b) und (c) ist wieder ein Spezialfall von Satz 3.2: Man nehme für $\mathfrak{M}$ das System der endlich erzeugten Abschnitte und für Γ den Schnittoperator Δ.

(c) ⇒ (d): Da $\mathring{\delta}(Q)$ im allgemeinen kein Hüllensystem ist, können wir an dieser Stelle Lemma 2.1 nicht anwenden. Jedoch gilt für nichtleere endliche Teilmengen $\mathfrak{Z}$ von $\mathring{\theta}(Q) : \Delta(\bigvee\mathfrak{Z}) = \Delta(\bigcup\mathfrak{Z}) = \Delta(\bigcup\Delta[\mathfrak{Z}]) = \bigvee\Delta[\mathfrak{Z}]$.

Also induziert Δ unter Voraussetzung (c) einen Verbandshomomorphismus von dem Mengenverband $\mathring{\theta}(Q)$ in die Vervollständigung $\delta(Q)$, und daher ist das Bild $\Delta[\mathring{\theta}(Q)]$ ein Unterverband von $\delta(Q)$, der alle Hauptideale enthält. Nach Definition ist $\mathring{\delta}(Q)$ der kleinste Unterverband mit dieser Eigenschaft. Andererseits bildet Δ den Verband $\mathring{\theta}(Q)$ sogar in $\mathring{\delta}(Q)$ ab, denn ein typisches Element von $\mathring{\theta}(Q)$ ist darstellbar als Durchschnitt eines nichtleeren endlichen Systems $\mathfrak{Z}$ nichtleerer endlich erzeugter Abschnitte, so daß das Bild

$$\Delta(\bigcap\mathfrak{Z}) = \bigcap\{\Delta Z : Z \in \mathfrak{Z}\} = \bigwedge\{\bigvee\{\downarrow x : x \in Z\} : Z \in \mathfrak{Z}\}$$

tatsächlich zu $\mathring{\delta}(Q)$ gehört. Insgesamt ist damit gezeigt, daß $\mathring{\delta}(Q)$ das Bild von $\mathring{\theta}(Q)$ unter der Abbildung Δ ist.

(d) ⇒ (e): Nach 2.2 ist das Bild eines Mengenverbandes unter einem Verbandshomomorphismus distributiv.

(e) ⇒ (f): $\downarrow x \cap \Delta\{y,z\} = \downarrow x \wedge (\downarrow y \vee \downarrow z) = (\downarrow x \wedge \downarrow y) \vee (\downarrow x \wedge \downarrow z) =$
$\Delta((\downarrow x \cap \downarrow y) \cup (\downarrow x \cap \downarrow z)) = \Delta(\downarrow x \cap \downarrow\{y,z\})$.
Hier wurden Suprema und Infima in dem distributiven Verband $\mathring{\delta}(Q)$ gebildet.

(f) ⇒ (b): Dieser „Sprung" von zweielementigen auf beliebige endliche Mengen (bzw. endlich erzeugte Abschnitte) ist der eigentlich problematische Teil des Beweises, denn eine Induktion à la Verbandstheorie versagt mangels der Existenz gewisser (endlicher) Suprema. Die Lösung dieses Beweisschrittes besteht in einer doppelten Dualisierung, welche sich auf Satz 4.10 stützt.

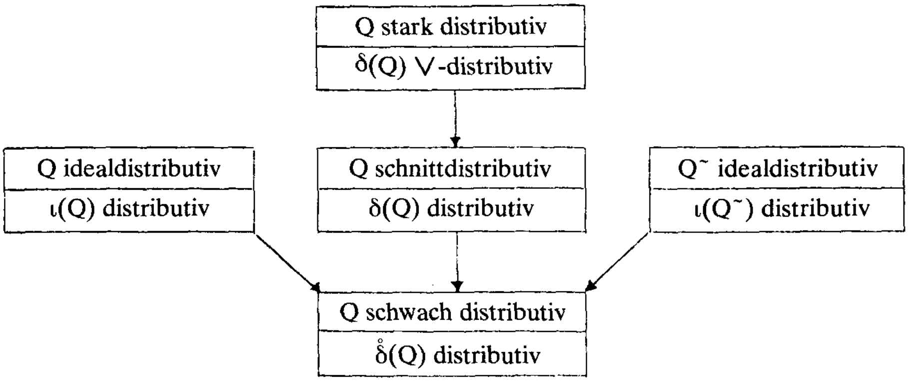
Für natürliche Zahlen $k_1,\ldots,k_n$ sei $S(k_1,\ldots,k_n)$ die Gesamtheit aller Systeme $\mathfrak{Y} = \{Y_1,\ldots,Y_n\} \subseteq \mathfrak{P}X$ mit $|Y_i| \leqq k_i$. Die Aussage (f) bedeutet nichts anderes, als daß jedes $\mathfrak{Y} \in S(1,2)$ Δ-treu ist. Wir sahen bereits, daß $\mathfrak{Y}$ dann auch ∇-treu ist. (Die erste Hürde!) Hieraus folgt nun wieder mit Satz 3.2, daß sogar für beliebig viele $k_i \leqq 2$ jedes $\mathfrak{Y} \in S(k_1,\ldots,k_n)$ ∇-treu ist. (Die zweite Hürde!) Jetzt machen wir nochmals von Satz 4.10 Gebrauch und folgern, daß jedes $\mathfrak{Y} \in S(1,n)$ Δ-treu ist (denn für $\mathfrak{Y} \in S(1,n)$ gehört das Auswahlsystem $\mathfrak{Y}^{\shortmid}$ zu einem $S(k_1,\ldots,k_n)$ mit $k_i \leqq 2$). Da n eine beliebige natürliche Zahl war, bedeutet dies aber gerade die in (b) beschriebene Eigenschaft, und die letzte Hürde ist genommen.□

Zur Klärung der Begriffe lohnt es sich, schwache Distributivität einmal mit der Idealdistributivität anhand der jeweiligen Bedingung (a) zu vergleichen: Die quasigeordnete Menge Q ist dann und nur dann schwach distributiv, wenn zu jedem endlich erzeugten Abschnitt A und jedem $x \in \Delta A$ eine Menge $B \subseteq A$ mit $\downarrow x = \Delta B$ existiert, wobei man nach 3.2 B als endlichen Durchschnitt endlich erzeugter Abschnitte annehmen kann. Der einzige Unterschied in der entsprechenden Charakterisierung der Idealdistributivität besteht darin, daß B selbst ein endlich erzeugter Abschnitt (oder eine endliche Menge) sein muß. Folglich fallen beide Begriffe zusammen, sobald das System der endlich erzeugten Abschnitte abgeschlossen gegen endliche (nichtleere) Durchschnittsbildung ist. Wie eine einfache Anwendung mengentheoretischer Distributivgesetze zeigt, genügt es zu fordern, daß der Durchschnitt von je zwei Hauptidealen einen endlich erzeugten Abschnitt liefert, was z.B. trivialerweise in jedem $\wedge$-Halbverband der Fall ist. Wir gelangen damit zu

Korollar 4.12. *Es sei Q eine quasigeordnete Menge, in welcher der Durchschnitt zweier Hauptideale stets ein endlich erzeugter Abschnitt ist. Dann sind schwache Distributivität und Idealdistributivität gleichwertige Eigenschaften für* Q.

Ohne Beweis sei vermerkt, daß in diesem Falle die Idealvervollständigungen von Q und der Verbandsergänzung $\mathring{\delta}(Q)$ isomorph sind. Für beliebige schwach distributive quasigeordnete Mengen (sogar $\vee$-Halbverbände) ist dies im allgemeinen falsch, wie aus Beispiel 4.13 hervorgehen wird.

Insgesamt erhalten wir das folgende Implikationsdiagramm:



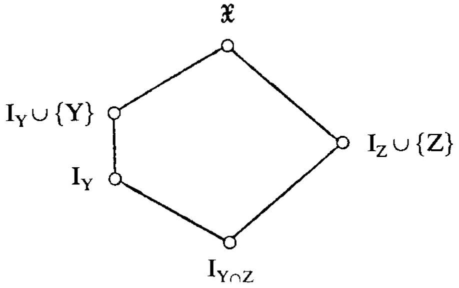
Für endliche quasigeordnete Mengen fallen natürlich alle fünf Eigenschaften zusammen, da dann $\iota(Q)=\delta(Q)=\mathring{\delta}(Q)$ und $\iota(Q^\sim)=\delta(Q^\sim)\simeq(\delta(Q)^\sim$ gilt. In Verbänden sind Idealdistributivität, duale Idealdistributivität und schwache Distributivität alle drei gleichbedeutend mit der gewöhnlichen Verbandsdistributivität, während Schnittdistributivität im allgemeinen eine schärfere Bedingung darstellt. In vollständigen Verbänden schließlich ist trivialerweise Schnittdistributivität und schwache Distributivität dasselbe, wogegen starke Distributivität hier mit $\bigvee$-Distributivität gleichwertig und daher eine schärfere Forderung als die gewöhnliche Distributivität ist.

Um nachzuweisen, daß die drei Eigenschaften

„idealdistributiv", „stark distributiv", „dual idealdistributiv"

unabhängig sind, also keine von ihnen aus den beiden anderen folgt, müssen wir nur noch ein Beispiel finden, in dem die Schnitt- und die duale Idealvervollständigung $\iota(Q^\sim)$, nicht aber die Idealvervollständigung $\iota(Q)$ ($\bigvee$-)distributiv ist.

Beispiel 4.13. Für eine unendliche Menge X sei $\mathfrak{X}$ das System aller Teilmengen, welche entweder endlich sind oder ein höchstens einelementiges Komplement haben. Teilweise geordnet durch Mengeninklusion, wird $\mathfrak{X}$ zu einem $\vee$-Halbverband, jedoch nicht zu einem Verband. Die Schnittvervollständigung $\delta(\mathfrak{X})$ ist isomorph zur Potenzmenge $\mathfrak{P}X$, also insbesondere $\bigvee$-distributiv, was bereits zeigt, daß $\mathfrak{X}$ selbst stark distributiv ist. Die Verbandsergänzung $\mathring{\delta}(\mathfrak{X})$ ist offenbar isomorph zum Booleschen Verband $\mathfrak{B}$ aller endlichen und co-endlichen Teilmengen von X. Die Idealvervollständigung $\iota(\mathfrak{X}^\sim)$ des zu $\mathfrak{X}$ dualen $\wedge$-Halbverbandes $\mathfrak{X}^\sim$ ist isomorph zu $\iota(\mathfrak{B})$ und daher distributiv, weshalb $\mathfrak{X}^\sim$ idealdistributiv sein muß (dies folgt auch aus 4.12). Dagegen werden wir sofort sehen, daß $\mathfrak{X}$ selbst nicht idealdistributiv sein kann. Bezeichnen wir mit I_Y das Ideal aller endlichen Teilmengen von Y, so ist für zwei Mengen $Y,Z\subseteq X$ mit $|X\setminus Y|=|X\setminus Z|=1$ das fünfelementige System



ein nichtdistributiver Unterverband der Idealvervollständigung $\iota(\mathfrak{X})$, weshalb diese nicht distributiv sein kann. *Idealdistributivität ist also weder selbstdual, noch folgt sie aus der starken Distributivität,* nicht einmal in $\vee$-Halbverbänden. Ganz anders liegen die Dinge bei $\wedge$-Halbverbänden: Hier ist Idealdistributivität sogar eine Folge der schwachen Distributivität, wie wir in 4.12 sahen.

Das vorangehende Beispiel dokumentiert, daß es keinen ideal-vervollständigungs-invarianten und zugleich selbstdualen Distributivitätsbegriff für quasigeordnete Mengen geben kann. Allerdings existiert eine andere „Idealvervollständigung", die genau dann distributiv ist, wenn die quasigeordnete Menge Q schwach distributiv ist, nämlich die Idealvervollständigung des Verbandes $\mathring{\delta}(Q)$. Die Konstruktion von $\iota(\mathring{\delta}(Q))$ ist jedoch in konkreten Fällen recht unhandlich, da man zwei Mengenstufen höhergehen muß. Eine dritte, „modifizierte Idealvervollständigung", die auf der selben Stufe wie $\iota(Q)$ steht und die gewünschte Dualisierungseigenschaft hat, erhält man folgendermaßen: Versteht man unter einem *starken Ideal* einer quasigeordneten Menge Q einen unteren Abschnitt, der mit $Z \in \mathring{\theta}(Q)$ auch ΔZ enthält, so ist dies nichts anderes als ein $\mathring{\theta}(Q)$-Ideal im Sinne von Abschnitt 3. Offenbar ist jedes starke Ideal auch ein FRINK'sches Ideal, und in $\wedge$-Halbverbänden stimmen beide Idealbegriffe überein (da dann $\mathring{\theta}(Q)$ aus allen nichtleeren endlich erzeugten unteren Abschnitten besteht). Für $\vee$-Halbverbände trifft dies jedoch im allgemeinen nicht zu, wie man an Beispiel 4.13 sieht: Dort sind die starken Ideale genau die unteren Schnitte. Bezeichnen wir mit $\bar{\iota}(Q)$ das Hüllensystem der starken Ideale, so erhalten wir als Spezialfall von Satz 3.6:

Satz 4.14. *Für eine quasigeordnete Menge* Q *sind äquivalent:*

(a) Q *ist schwach distributiv.*

(b) *Der starke Idealoperator* $\bar{I} : Y \longmapsto \bigcup \{\Delta M : M \in \mathring{\theta}(Q), M \subseteq Y\} \cup \downarrow Y$ *erhält endliche Durchschnitte unterer Abschnitte.*

(c) $\bar{I}$ *induziert einen Verbandshomomorphismus von* $\theta(Q)$ *auf* $\bar{\iota}(Q)$.

(d) $\bar{\iota}(Q)$ *ist ein* ($\bigvee$-)*distributiver Verband.*

Definitionsgemäß gilt $\bar{I}Z = \Delta Z$ für endliches Z (denn dann ist der Abschnitt $\downarrow Z$ aus $\mathring{\theta}(Q)$). Daher ist $\bar{I}$ genau dann ein algebraischer Hüllenoperator, wenn $\bar{I}$ mit dem Idealoperator I zusammenfällt. In Beispiel 4.13 haben wir den Fall eines nicht algebraischen starken Idealsystems $\bar{\iota}(\mathfrak{X}) = \delta(\mathfrak{X})$, obgleich hier Isomorphie zu einer Potenzmenge vorliegt! Das System $I_X = \bigcup \{I_Z : Z \Subset X\}$ aller endlichen Teilmengen ist zwar gerichtete Vereinigung von Hauptidealen, aber kein unterer Schnitt (d.h. kein starkes Ideal). Obwohl also $\bar{\iota}(Q)$ kein algebraisches Hüllensystem zu sein braucht, kann man aus der Distributivität von $\bar{\iota}(Q)$ direkt auf die schwache Distributivität von Q schließen, indem man ausnutzt, daß das Supremum zweier Hauptideale $\downarrow y$ und $\downarrow z$ in $\bar{\iota}(Q)$ der untere Schnitt $\Delta\{y,z\}$ ist (vgl. den Beweis der Implikation (e) $\Rightarrow$ (b) in 4.9). In Beispiel 4.13 sind die Idealvervollständigungen $\iota(\mathfrak{X})$, $\bar{\iota}(\mathfrak{X})$ und $\iota(\mathring{\delta}(\mathfrak{X}))$ paarweise nichtisomorph; denn $\bar{\iota}(\mathfrak{X}) = \delta(\mathfrak{X})$ ist ein vollständiger Boolescher Verband, während $\iota(\mathring{\delta}(\mathfrak{X}))$ zwar distributiv, aber nicht komplementär ist; und $\iota(\mathfrak{X})$ ist, wie wir sahen, nicht einmal distributiv. Im allgemeinen gibt es also drei verschiedene „natürliche" Idealvervollständigungen einer quasigeordneten Menge, während in $\wedge$-Halbverbänden alle drei Versionen isomorph sind.

KATRIŇÁK [22] hat für den Spezialfall nach unten gerichteter $\vee$-Halbverbände eine Charakterisierung der Idealdistributivität gegeben, die der Äquivalenz (e) $\Leftrightarrow$ (f) in 4.11 entspricht. Diese Charakterisierung läßt sich mühelos auf quasigeordnete Mengen übertragen, und wir notieren als abschließendes Resultat:

Satz 4.15. *Eine quasigeordnete Menge* Q *ist genau dann idealdistributiv, wenn der von den Hauptidealen erzeugte Unterverband* $\mathring{\iota}(Q)$ *des Idealverbandes* $\iota(Q)$ *distributiv ist.*

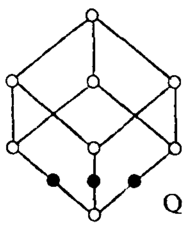
5. Schlußbemerkungen

Faßt man eine teilweise geordnete Menge Q als Teilmenge ihrer Schnittvervollständigung $V = \delta(Q)$ auf, so ist $\mathring{\delta}(Q)$ der von Q erzeugte Unterverband von V. Im Sinne dieser Identifikation bedeutet schwache Distributivität von Q einfach, daß für je drei Elemente x,y,z von Q das gewöhnliche Distributivgesetz

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

in V erfüllt ist. Satz 4.11 besagt unter anderem, daß in diesem Fall bereits der ganze von Q erzeugte Unterverband $\langle Q \rangle = \mathring{\delta}(Q)$ distributiv ist. Die Frage, ob in dieser Aussage $\delta(Q)$ durch einen *beliebigen* vollständigen Verband V ersetzt werden darf, der Q umfaßt, muß leider verneint werden, wie das folgende Beispiel zeigt:

$V = \langle Q \rangle$



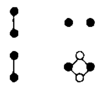
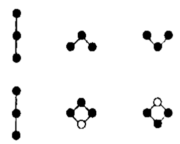
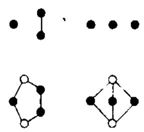
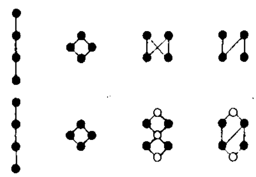
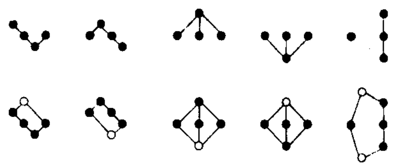
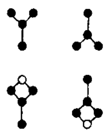
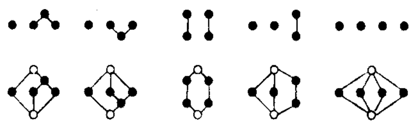
Q

Eine zweite naheliegende Frage ist, ob sich *Modularität* (oder allgemeiner eine beliebige durch Gleichungen definierbare Eigenschaft) von Q auf $\mathring{\delta}(Q)$ überträgt. Dabei würde man in Analogie zur Definition der Distributivität eine quasigeordnete Menge Q *modular* nennen, wenn

$$\downarrow x \cap \Delta\{y,z\} = \Delta(\downarrow x \cap \downarrow\{y,z\})$$

für je drei Elemente x,y,z aus Q mit $z \leqq x$ gilt. Die Antwort auf diese Frage steht noch aus. Man beachte, daß ein von einer endlichen Menge erzeugter distributiver Verband stets endlich ist, auch wenn seine Kardinalität sehr groß werden kann – nach DEDEKIND „18 im Falle n = 3, und (wenn ich nicht irre) 166 im Falle n = 4" (er irrte nicht!) Dagegen kann ein modularer Verband mit vier Erzeugenden bereits unendlich werden (vgl. C. HERRMANN, *„Über die von vier Moduln erzeugte Dualgruppe"*, diese Festschrift).

TABELLE
der distributiven teilweise geordneten Mengen mit höchstens vier Elementen und ihrer Vervollständigungen

Elemente		distributiv	nicht distributiv
1	Q δ(Q)		
2	Q δ(Q)		
3	Q δ(Q)		
4	Q δ(Q)		
	Q δ(Q)		

Wie man leicht sieht, ist die einzige unzusammenhängende distributive teilweise geordnete Menge die zweielementige Antikette. Das Beispiel  zeigt, daß sich Distributivität nicht auf beliebige Teilmengen überträgt.

Literatur

[1] A. ABIAN: On definitions of cuts and completion of partially ordered sets. Z. Math. Logik Grundlagen Math. **14** (1968), 299–309.

[2] P.S. ALEXANDROFF: Diskrete Räume. Mat. Sb. (N.S.) **2** (1937), 501–518.

[3] B. BANASCHEWSKI: Hüllensysteme und Erweiterung von Quasi-Ordnungen. Z. Math. Logik Grundlagen Math. **2** (1956), 117–130.

[4] B. BANASCHEWSKI & G. BRUNS: Categorial characterization of the MacNeille completion. Arch. Math. **43** (1967), 369–377.

[5] B. BANASCHEWSKI & R.-E. HOFFMANN (editors): Continuous lattices. Lecture Notes in Mathematics **871**, Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1981.

[6] H.-J. BANDELT & M. ERNÉ: Representations and embeddings of $\mathfrak{M}$-distributive lattices. Houston J. Math. (to appear).

[7] A. BISHOP: A universal mapping characterization of the completion by cuts. Algebra Universalis **8** (1978), 349–353.

[8] G. BIRKHOFF: Rings of sets. Duke Math. J. **3** (1937), 443–454.

[9] G. BIRKHOFF: Lattice theory. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **25**, third ed., Providence, R.I., 1973.

[10] G. BRUNS: Darstellungen und Erweiterungen geordneter Mengen, I, II. J. Reine Angew. Math. **209** (1962, 167–200; **210** (1962), 1–23.

[11] G. BRUNS: Verbandstheoretische Kennzeichnung vollständiger Mengenringe. Arch. Math. **10** (1959), 109–112.

[12] P. CRAWLEY & R.P. DILWORTH: Algebraic theory of lattices. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1973.

[13] R. DEDEKIND: Stetigkeit und irrationale Zahlen (1872); 7. Auflage, Vieweg, Braunschweig 1969.

[14] R. DEDEKIND: Gesammelte Mathematische Werke II, Vieweg, Braunschweig 1931.

[15] R.P. DILWORTH & J.E. MCLAUGHLIN: Distributivity in lattices. Duke Math. J. **19** (1952), 683–693.

[16] M. ERNÉ: Isomorphismen und Identifikationen in der Ordnungstheorie. Math. Sem. Ber. **28** (1981), 74–91.

[17] M. ERNÉ: Verallgemeinerungen der Verbandstheorie I, II. Preprint und Habilitationsschrift, Hannover 1979.

[18] O. FRINK: Ideals in partially ordered sets. Amer. Math. Monthly **61** (1954), 223–234.

[19] N. FUNAYAMA: On the completion by cuts of distributive lattices. Proc. Imp. Acad. Tokyo **20** (1944), 1–2.

[20] G. GRÄTZER: General lattice theory. Birkhäuser, Basel 1978.

[21] F. HAUSDORFF: Grundzüge der Mengenlehre. Veit & Co., Leipzig 1914.

[22] T. KATRIŇÁK: Pseudokomplementäre Halbverbände. Mat. časopis **18** (1968), 121–143.

[23] F. KLEIN–BARMEN: Grundzüge der Theorie der Verbände. Math. Ann. **111** (1935), 596–621.

[24] H.M. MACNEILLE: Extensions of partially ordered sets. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **22** (1936), 45–50.

[25] H.M. MACNEILLE: Partially ordered sets. Trans. Amer. Math. Soc. **42** (1937), 416–460.

[26] H. MEHRTENS: Die Entstehung der Verbandstheorie. Arbor scientiarum; Gerstenberg, Hildesheim 1979.

[27] J. SCHMIDT: Über die Rolle der transfiniten Schlußweisen in einer allgemeinen Idealtheorie. Math. Nachr. **7** (1952), 165–182.

[28] J. SCHMIDT: Einige grundlegende Begriffe und Sätze aus der Theorie der Hüllenoperatoren. Ber. Math. Tagung Berlin (1953), 21–48.

[29] J. SCHMIDT: Beiträge zur Filtertheorie II. Math. Nachr. **10** (1953), 197–232.

[30] J. SCHMIDT: Zur Kennzeichnung der Dedekind–MacNeilleschen Hülle einer geordneten Menge. Arch. Math. **7** (1956), 241–249.

[31] J. SCHMIDT: Every join-completion is the solution of a universal problem. J. Austral. Math. Soc. **17** (1974), 406–413.

[32] E. SCHRÖDER: Vorlesungen über die Algebra der Logik, Dritter Band. Teubner, Leipzig 1895.

[33] A.K. STEINER: The lattice of topologies: Structure and complementation. Trans. Amer. Math. Soc. **122** (1966), 379–398.

[34] M.H. STONE: The theory of representations for Boolean algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 37–111.

[35] M.H. STONE: Topological representation of distributive lattices and Brouwerian logics. Časopis Pěst. Mat. **67** (1937), 1–25.

[36] A. TARSKI: Sur les classes d'ensembles closes par rapport à certaines opérations élémentaires. Fund. Math. **16** (1930), 181–304.